

# Intitulé du projet : “Modélisation et simulation numérique du déferlement des vagues en océanographie côtière”

---

**Positionnement** Depuis plusieurs décennies, de nombreux travaux ont été menés dans la perspective d’acquérir une meilleure compréhension des mécanismes hydrodynamiques en océanographie, notamment en zone côtière. Devant l’augmentation de la population à proximité des côtes et les enjeux environnementaux actuels (événements extrêmes, développement de parcs à hydroliennes, hydroélectricité, ...), l’étude des phénomènes marins pouvant avoir un impact sur les habitations et les infrastructures suscite un intérêt croissant au sein de la communauté scientifique. Dans ce contexte, il est essentiel de bien comprendre les mécanismes régissant la déformation et la propagation des vagues. A cet effet, l’intérêt se porte sur les modèles communément appelés *dispersifs*, et notamment les équations de Green-Naghdi (GN). Ces modèles sont capables de décrire le comportement des vagues en profondeurs intermédiaires. Ils permettent, par exemple, de capturer les fortes non-linéarités induites par les variations du fond à l’arrivée des côtes, ce qui dépasse le champ d’application des modèles simplifiés (Shallow Water par exemple). Néanmoins, bien qu’ils fournissent une bonne description des vagues dans ces zones, ils conservent l’énergie et sont à ce titre intrinsèquement inaptes à décrire le phénomène de déferlement (transfert d’énergie mécanique en énergie turbulente). Aujourd’hui, si de nombreuses avancées ont été réalisées dans la dérivation de modèles et leur justification mathématique, ce mécanisme complexe soulève toujours de nombreuses questions, tant d’un point de vue physique que numérique.

**Etat de l’art** Au stade actuel, les différentes approches proposées pour gérer le déferlement se répartissent en deux catégories. La première consiste à rajouter un terme *ad-hoc* de viscosité artificielle aux équations GN afin de modéliser la dissipation d’énergie observée au cours du déferlement. Dans la seconde stratégie, communément appelée *switching*, les termes dispersifs sont supprimés au niveau des vagues déferlantes et seule la partie hyperbolique du modèle (Shallow Water) est résolue. Cette méthodologie permet de traiter les vagues qui déferlent comme des chocs à travers un système hyperbolique. De nombreuses méthodes de ce type ont été proposées récemment, basées sur différents critères pour détecter les zones de déferlement.

**Une nouvelle approche** Si ces stratégies permettent de stabiliser les calculs dans un premier temps, elles nécessitent la calibration empirique d’un certain nombre de paramètres (physiques et numériques), qui varient selon les contextes étudiés. Par ailleurs, les discontinuités induites sur le modèle par l’ajout ou la suppression de termes génèrent des perturbations qui peuvent se propager et détériorer considérablement la qualité des approximations.

Pour s’affranchir de ces limitations, une nouvelle classe de modèles est en train d’émerger. Il s’agit de tendre vers des approches pour lesquelles le déferlement est directement contenu dans la physique du modèle. Dans la continuité des travaux de G. Richard et S. Gavriluk, un modèle bi-couche a récemment été proposé pour des applications à l’hydraulique, fournissant une excellente description du phénomène [3]. Un modèle à une couche est actuellement développé par M. Kazakova et G. Richard. Il généralise les équations GN classiques en prenant en compte le déferlement à travers une troisième variable liée à l’énergie turbulente. Sa structure permet en outre, et sans limitation, une extension naturelle des méthodes numériques existantes pour les équations dispersives. C’est sur cette base que nous envisageons une nouvelle approche offrant une description complète des mécanismes hydrodynamiques en zone littorale.

**Objectifs :** Ce projet s’insère naturellement dans les thématiques actuelles de l’équipe MMCS (Modélisation Mathématique et Calcul Scientifique) du laboratoire. Sa réalisation s’articule autour des points suivants (détaillés dans l’**Annexe**) :

- Dérivation d’un modèle dispersif orienté vers le déferlement des vagues en zone littorale.
- Mise en oeuvre numérique, validation et diffusion.

# Annexe

---

**1 - Participants.** Devant la diversité des enjeux qui viennent d'être évoqués, il est nécessaire de mobiliser une équipe couvrant un large spectre de compétences (modélisation, océanographie, analyse mathématique et simulation numérique). Le projet se réunit ainsi autour d'un groupe de chercheurs aux profils très complémentaires, listés ci-dessous par niveau d'implication :

**Arnaud Duran (porteur du projet)** - Maître de Conférences à l'Université Claude Bernard Lyon 1.

*Modélisation, analyse et simulation numérique* - Durant sa thèse, Arnaud Duran s'est intéressé à l'analyse et la simulation numérique des équations Shallow Water et des modèles dispersifs. Il a développé des schémas 1d et 2d sur maillages non structurés, dans des environnements type Volumes Finis (VF) et Galerkin Discontinu (dG), et a récemment proposé, en collaboration avec F. Marche, un solveur dG 2d pour la simulation des équations dispersives fortement non linéaires (GN) [2]. Au cours de ses travaux, il s'est aussi intéressé à la problématique du déferlement des vagues, ainsi qu'aux questions de stabilité non linéaire (préservation des états d'équilibre, positivité de la hauteur d'eau, inégalités d'entropie).

Implication : 80 % (*items précisés en §2 - Objectifs Détaillés*) : **A2,A3,B1,B2,B3**

**Gaël Richard** - Professeur agrégé de physique en disponibilité, Post-Doctorant à l'Université Toulouse III Paul Sabatier (Institut de Mathématiques de Toulouse).

*Mécanique des fluides, hydraulique à surface libre, modélisation* - Durant sa thèse de doctorat, Gaël Richard a développé un nouveau modèle hyperbolique pour l'hydraulique à surface libre. Ces équations RG [8] permettent de décrire avec une excellente précision les écoulements rapidement variés comme les ressauts hydrauliques [6] et les roll waves [4]. Le modèle RG permet notamment de prédire non seulement le profil de profondeur mais également les oscillations d'un ressaut hydraulique turbulent. Par la suite, il s'est aussi intéressé aux effets dispersifs [5] et aux films minces visqueux avec capillarité.

Implication : 70 % **A1,A3,B1,B3**

**Maria Kazakova** - Doctorante à l'Institut de Mathématiques de Toulouse.

*Aspects théoriques et modélisation. Simulation numérique* - Maria Kazakova est en deuxième année de thèse à l'Institut de Mathématiques de Toulouse, sous la direction de Pascal Noble, et travaille sur la dérivation de modèles dispersifs pour l'océanographie. Elle met actuellement en oeuvre une méthode numérique pour un modèle de déferlement 1d destiné à des applications à l'hydraulique.

Implication : 30 % **A1,A2,A3**

**Philippe Bonneton** - Directeur de Recherche CNRS, Bordeaux.

*Modélisation, océanographie et vagues côtières* - Philippe Bonneton est un spécialiste de la modélisation des vagues en zone côtière. En particulier, il a beaucoup travaillé sur la dérivation de modèles dispersifs et a étudié la déformation et la propagation des vagues en zone littorale. Il a une connaissance approfondie des différents aspects liés au déferlement des vagues. Son expertise sera d'une aide précieuse, notamment durant la phase de validation.

Implication : 10 % **A1,A3**

## 2 - Objectifs détaillés - Programme de recherche.

### *Court terme*

**Dérivation du modèle 1d (A1)** L'objectif est d'obtenir la structure mathématique des équations d'Euler des fluides compressibles avec termes sources, afin d'avoir l'assurance que le problème soit bien posé et de faciliter la résolution numérique. Le modèle comporte trois variables et trois équations, s'écrivant sous forme conservative, correspondant aux bilans de masse, quantité de mouvement et énergie. La partie hyperbolique admet une entropie  $\varphi$  qui vérifie une équation de transport avec

terme source. Les termes dispersifs sont traités comme dans les équations GN. La partie conservative du modèle admet des solutions de type soliton, généralisant le soliton du modèle GN [5]. La principale difficulté réside dans la modélisation de l'apparition de l'énergie turbulente lors du déferlement. Du fait de la dispersion, les solutions sont continues, ce qui élimine toute possibilité de création d'énergie turbulente par les discontinuités comme dans les roll waves étudiées dans [4]. On y supplée par l'introduction de viscosité turbulente associée à un critère de déferlement basé sur l'étude expérimentale de l'apparition de turbulence dans le cas d'un soliton.

**Mise en oeuvre numérique (A2)** Il s'agit principalement d'exploiter la structure du modèle en cours de réalisation afin de faciliter sa résolution numérique. Plus précisément, dans la continuité des travaux proposés dans [1], ce système à trois équations peut simplement se réinterpréter comme un modèle hyperbolique classique, à travers lequel les effets dispersifs apparaissent comme terme source. Dans cette approche, le déferlement se gère à travers l'introduction de la troisième variable  $\varphi$ , vérifiant une simple équation de transport dans la phase hyperbolique. Ainsi, cette approche continue permet de s'orienter vers des résolutions d'ordre élevé, sans dénaturer les propriétés de robustesse du schéma précédemment proposé [1]. Nous visons donc une discrétisation type dG du modèle, vérifiant les propriétés suivantes :

- \* Ordre de précision arbitraire en espace.
- \* Préservation de la positivité de la hauteur d'eau (à tout ordre).
- \* Préservation des états d'équilibre statiques (à tout ordre).
- \* Gestion du déferlement via le transport de l'énstrophie.

**Validation (A3)** La phase de validation du modèle constitue un enjeu de grande ampleur, visant à établir avec précision les bénéfices attendus de cette nouvelle approche. En particulier, ils pourraient se dégager dans les contextes les plus complexes, comme l'étude de propagation de train d'ondes, déferlement sur topographies irrégulières et comportement en temps long, qui mettent à mal la plupart des stratégies actuelles. Ces conclusions apparaîtront à travers une phase de comparaison minutieuse avec les solutions expérimentales et/ou codes antérieurs, avec une attention particulière sur l'étude des bilans énergétiques et une analyse fine du profil de déformation des vagues. Enfin, il serait opportun de se baser sur de nouvelles solutions expérimentales, en collaboration avec S. Gavriluyk et le laboratoire d'hydrodynamique de Tainan (Taïwan).

### *Moyen terme*

**Dérivation du modèle 2d (B1)** L'extension du modèle au cas 2d est nécessaire pour des applications pratiques. L'objectif d'obtenir une structure mathématique satisfaisante est maintenu. Le travail principal consiste en la fermeture du problème. Enfin, devant la problématique du temps de calcul, un enjeu majeur consiste à réécrire le modèle avec opérateur elliptique indépendant du temps. Cet objectif pourrait s'atteindre sur la base des travaux de D. Lannes et F. Marche, qui ont récemment proposé une telle démarche sur les équations GN classiques [7].

**Mise en oeuvre numérique (B2)** A terme, l'objectif est d'aboutir à un code de calcul opérationnel destiné à la simulation en océanographie côtière, capable de capturer convenablement la physique complexe du déferlement. Dans cette optique, nous pourrions nous baser sur les travaux récents [2] afin d'étendre le code aux maillages triangulaires et viser des simulations 2d impliquant des géométries et topographies réalistes.

**Diffusion (B3)** A ce titre, ce projet se trouve être en complémentarité avec la mise en place du code UHAINA (INRIA Bordeaux), parallèlement développé pour la simulation des vagues extrêmes (tsunamis), et dans lequel P. Bonneton et A. Duran sont aussi impliqués. La convergence de ces deux études pourrait aboutir à un code de calcul de pointe, performant à la fois pour la simulation grande échelle et en zone littorale.

**Montant des ressources financières : 8500 €**  
(Détails dans la demande de subvention)

# Références

- [1] A. Duran and F. Marche. Discontinuous Galerkin discretization of a new class of Green-Naghdi equations. *CiCP*, 17 :721–760, 2015.
- [2] A. Duran and F. Marche. A discontinuous Galerkin method for a new class of Green-Naghdi equations on simplicial unstructured meshes *App. Math. Mod.*, In press, 2016.
- [3] S. Gavriluk, V. Liapidevskii and A. Chesnokov. Spilling breakers in shallow water : applications to Favre waves and to the shoaling and breaking of solitary waves. *Journal of Fluid Mechanics*, 808 :441-468, 2016.
- [4] G. L. Richard and S. L. Gavriluk. A new model of roll waves : comparison with Brock’s experiments. *Journal of Fluid Mechanics*, 698 :374–405, 2012.
- [5] G. L. Richard and S. L. Gavriluk. Modelling turbulence generation in solitary waves on shear shallow water flows. *Journal of Fluid Mechanics*, 773 :49–74, 2015.
- [6] G. L. Richard and S. L. Gavriluk. The classical hydraulic jump in a model of shear shallow-water flows. *Journal of Fluid Mechanics*, 725 :492–521, 2013.
- [7] D. Lannes, F. Marche. A new class of fully nonlinear and weakly dispersive Green-Naghdi models for efficient 2D simulations. *J. Comput. Phys.*, 282 :238–268, 2015.
- [8] O. Thual. Modelling rollers for shallow water flows. *Journal of Fluid Mechanics.*, 728 :1–4, 2013.