
Fiche 2
SUITES ET SÉRIES NUMÉRIQUES

Notions abordées

Suites numériques

- *Limites de suites réelles et complexes, théorèmes d'existence*
- *Monotonie, critères de convergence*
- *Notion de suite extraite, suites adjacentes*
- *Comparaison et comportement de suites de référence*
- *Théorème de Bolzano Weierstrass*
- *Applications : moyenne arithmético-géométrique, développement décimal d'un réel, suites géométriques complexes, suites de Cauchy*

Séries numériques

- *Critères essentiels de convergence, convergence absolue des séries, séries alternées*
- *Règles de d'Alembert et de Cauchy, théorème d'Abel*
- *Comparaison avec une intégrale*
- *Séries géométriques, séries de Riemann, séries de Bertrand*
- *Applications : convergence de séries, série harmonique, constante d'Euler, formule de Stirling*

PARTIE I : Suites numériques

A - QUELQUES RÉSULTATS DE BASE

Dans cette partie on se propose d'établir certains résultats essentiels concernant l'étude des suites.

1 - Un critère essentiel de convergence

Proposition. Toute suite convergente est bornée.

2 - Un résultat de convergence

Proposition. Si (u_n) est bornée et (v_n) converge vers 0, alors la suite (u_nv_n) converge vers 0.

3 - Caractérisation de la convergence via les suites extraites

Définition. Soit (u_n) une suite. On dit que la suite (v_n) est une *sous-suite* ou une *suite extraite* de (u_n) s'il existe une application $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $v_n = u_{\varphi(n)}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Proposition. La suite (u_n) converge vers l ssi toute sous-suite de (u_n) converge vers l.

4 - Suites monotones

Proposition.

Si (u_n) est croissante et non majorée, alors elle diverge vers $+\infty$.
Si (u_n) est croissante et majorée, alors elle converge vers $l = \sup\{u_n\,,\, n\in\mathbb{N}\}$.

Si (v_n) est décroissante et non minorée, alors elle diverge vers $-\infty$.
Si (v_n) est décroissante et minorée, alors elle converge vers $l = \inf\{u_n\,,\, n\in\mathbb{N}\}$.

5 - Suites adjacentes

Proposition. Soient (u_n) et (v_n) deux suites telles que :
- (u_n) est croissante et (v_n) est décroissante.
- $(u_n - v_n)$ converge vers 0.

Alors (u_n) et (v_n) ont la même limite. On dit que les suites (u_n) et (v_n) sont *adjacentes*.

6 - Théorème de Bolzano-Weierstrass

Proposition. De toute suite bornée, on peut extraire une sous-suite convergente.

7 - Comparaison des suites

Définitions. Soient (u_n) et (v_n) deux suites. On suppose que v_n est non nul à partir d'un certain rang.
- On dit que (u_n) et (v_n) sont *équivalentes* si la suite $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$ converge vers 1.
  On note alors $u_n \sim v_n$.
- On dit que (u_n) est *négligeable* devant (v_n) si la suite $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$ converge vers 0.
  On note alors $u_n = o(v_n)$.
- On dit que (u_n) est *dominée* par (v_n) si la suite $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$ est bornée.
  On note alors $u_n = \mathcal{O}(v_n)$.

Proposition. Soient (u_n) et (v_n) deux suites de termes strictement positifs. S'il existe $\lambda\in[0,1[$ et $N\in\mathbb{N}$ tels que

$$\forall n \geq N\ ,\ \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \lambda \frac{v_{n+1}}{v_n}\,,$$

alors $u_n = o(v_n)$.

Proposition. Soient α, $\beta > 0$ et $a > 1$. On considère les suites de terme général :

$u_n = (\ln(n))^\beta\ ,\ n\geq 2 \quad , \quad v_n = n^\alpha\,,\ n\geq 1 \quad , \quad w_n = a^n\,,\ n\geq 0 \quad , \quad z_n = n!\,,\ n\geq 0\,.$

On a $u_n = o(v_n)$, $v_n = o(w_n)$ et $w_n = o(z_n)$.

8 - Suites complexes

Définition. On dit que la suite complexe (z_n) converge vers $l\in\mathbb{C}$ si

$$\forall\,\varepsilon > 0\,,\ \exists N\in\mathbb{N}\,,\ \forall n\geq N\ ,\ |z_n - l| \leq \varepsilon\,.$$

Proposition. La suite complexe (z_n) converge vers l ssi sa partie réelle (x_n) converge vers $Re(l)$ et sa partie imaginaire (y_n) converge vers $Im(l)$.

Proposition. Si la suite complexe (z_n) converge vers l alors $(|z_n|)$ converge vers $|l|$.

B - Exercices d'application

Exercice 1 : *Suites adjacentes - irrationalité de e*

On considère les suites (u_n) et (v_n) de terme général $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ et $v_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + \frac{1}{n.n!}$.

1 - Montrer que (u_n) et (v_n) sont adjacentes. On note e leur limite commune.

2 - Montrer que e est irrationnel.

Indication : On pourra raisonner par l'absurde en posant $e = p/q$ avec p et q entiers non nuls et utiliser $u_q < e < v_q$.

Exercice 2 : *Suites adjacentes - Moyenne arithmético-géométrique*

On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par :

$$\left\{ \begin{array}{l} u_0 = a \in \mathbb{R}^+ \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n} \end{array} \right. \qquad \text{et} \qquad \left\{ \begin{array}{l} v_0 = b \in \mathbb{R}^+ \\ v_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2} \end{array} \right. .$$

1 - Montrer que pour tous réels positifs x et y, on a $2\sqrt{xy} \leq x + y$.

2 - **(a)** Montrer que $(u_n)_{n\geq 1}$ est croissante et que $(v_n)_{n\geq 1}$ est décroissante.

(b) Montrer que (u_n) et (u_n) sont adjacentes. On notera $M(a, b)$ leur limite commune.

3 - Déterminer $M(a, 0)$ et $M(a, a)$.

4 - Soit $\lambda \in \mathbb{R}^+$. Exprimer $M(\lambda a, \lambda b)$ en fonction de $M(a, b)$.

Exercice 3 : *Suite géométrique complexe*

Soit $q \in \mathbb{C}$. On considère la suite de terme général $u_n = q^n$, $n \in \mathbb{N}$.

1 - On suppose $|q| > 1$.

(a) Montrer que pour tout $a \geq 0$ et tout entier $n \in \mathbb{N}$, on a : $(1 + a)^n \geq 1 + na$.

(b) En déduire que (u_n) diverge.

2 - On suppose à présent $|q| < 1$. Montrer que (u_n) tend vers 0.

Exercice 4 : *Un classique*

On considère une suite réelle (u_n) croissante, convergeant vers l.

1 - Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de terme général $v_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k$ est croissante.

2 - Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_{2n} \geq \dfrac{1}{2}(u_n + v_n)$.

3 - En déduire que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers l.

Exercice 5 : *Un autre classique*

1 - Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ on a

$$x - \frac{1}{2}x^2 \leq \ln(1 + x) \leq x\,.$$

2 - En déduire la limite de la suite (u_n) de terme général

$$u_n = \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{k}{n^2}\right) \quad , \quad n \in \mathbb{N}^* .$$

<u>**Exercice 6 :**</u> *Développement décimal d'un réel*

1 - Approximation décimale d'un réel.

Soit $x \in \mathbb{R}$.

On considère les suite (u_n) et (v_n) de terme général $u_n = \dfrac{[10^n x]}{10^n}$ et $v_n = \dfrac{[10^n x]}{10^n} + \dfrac{1}{10^n}$.

(a) Montrer que (u_n) converge vers x et que pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n (resp. v_n) fournit une approximation de x à 10^{-n} près par défaut (resp. par excès).

(b) On considère la suite (a_n) définie par $a_0 = [x]$ et $a_{n+1} = 10^{n+1}(u_{n+1} - u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que pour $n \geq 1$, a_n est compris entre 0 et 9.

(c) Montrer que (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

(d) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{10^k}$. En déduire que $x = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{10^k}$.

Cette écriture est appelée **développement décimal** de x et les réels a_n sont les **chiffres** de x.

2 - Résultats de densité.

(a) Montrer que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

(b) Montrer que pour tout entier relatif z, z^2 est pair si et seulement si z est pair. En déduire que $\sqrt{2}$ est irrationnel.

(c) En déduire que $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

3 - Développement décimal propre.

(a) Montrer que le développement décimal $x = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{10^k}$ obtenu dans la partie **1** est **propre**, c'est à dire que la suite (a_n) n'est pas stationnaire à 9 à partir d'un certain rang.

(b) Montrer que tout nombre réel positif admet un unique développement décimal propre.

4 - Application : $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable.

Rappel : Un ensemble E est dénombrable s'il existe une bijection de $\mathbb{N}$ dans E.

Indication : On montrera par l'absurde que $[0, 1[$ n'est pas dénombrable. En supposant qu'une application bijective $f : \mathbb{N} \to [0, 1[$ existe, on pourra considérer la suite (w_n) où w_n est la n-ième décimale de $f(n)$ et étudier la surjectivité de f.

<u>**Exercice 7 :**</u> *Suites de Cauchy*

Une suite (u_n) est dite de Cauchy si elle vérifie

$$\forall \varepsilon > 0 \, , \, \exists N \in \mathbb{N} \, , \, \forall (p, q) \in \mathbb{N}^2 \, , \, p, q \geq N \Rightarrow |u_p - u_q| < \varepsilon \, .$$

1 - Une propriété générale : Montrer que toute suite convergente est de Cauchy.

2 - Un exemple de suite de Cauchy non convergente.

On considère la suite (u_n) de terme général $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$.

(a) Soient $p, q \in \mathbb{N}$, tels que $p > q$. Montrer que pour tout entier k vérifiant $q+1 \leq k \leq p$, on a :

$$\frac{1}{k!} \leq \frac{1}{(q+1)!} \frac{1}{(q+1)^{k-(q+1)}} .$$

(b) En déduire que la suite (u_n) est de Cauchy.

(c) Montrer que (u_n) n'est pas convergente dans $\mathbb{Q}$ (*on pourra se servir de l'exercice 1*).

3 - Cas des suites réelles.

(a) Montrer que toute suite de Cauchy réelle est bornée.

(b) Soit (u_n) une suite de Cauchy réelle. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $W_n = \{u_k \, , \, k \geq n\}$.

Justifier l'existence de $a_n = \inf(W_n)$ et $b_n = \sup(W_n)$, et montrer que $a_n \leq u_n \leq b_n$.

(c) Montrer que (a_n) est croissante et que (b_n) est décroissante.

(d) Soit $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour $p \geq n \geq N$ on ait

$$\sup_{p \geq n} u_p \leq u_n + \varepsilon/2 \quad \text{et} \quad \inf_{p \geq n} u_p \leq u_n - \varepsilon/2 .$$

(e) En déduire que (a_n) et (b_n) sont adjacentes, puis que (u_n) converge.

PARTIE II : Séries numériques

*Les parties **A** et **B** regroupent les principaux résultats et théorèmes fondamentaux sur les séries numériques. Il est vivement recommandé de savoir les redémontrer.*

A - Quelques rappels de base

Définition. Soit (u_n) une suite réelle ou complexe. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$. On dit que la série $\sum u_n$ converge si la *suite des sommes partielles* (S_n) converge.

1 - Un premier exemple fondamental : *les séries géométriques*

Proposition. Soit $x \in \mathbb{R}$. La série de terme général x^n converge ssi $|x| < 1$. Dans le cas où elle converge, sa somme est $s = \dfrac{1}{1-x}$.

2 - Critères essentiels de convergence

Proposition. Si $\sum u_n$ converge alors (u_n) converge vers 0.

Proposition. Soit (u_n) une série à termes positifs. La série $\sum u_n$ converge ssi (S_n) est majorée.

Proposition. On considère deux séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ à termes positifs à partir d'un certain rang N. Si $u_n \leq v_n$ pour tout $n \geq N$, alors :
- Si $\sum v_n$ converge alors $\sum u_n$ converge.
- Si $\sum u_n$ diverge alors $\sum v_n$ diverge.

3 - Comparaison avec une intégrale

Proposition. Soit $f : [N_0, +\infty[\to \mathbb{R}$ positive décroissante. La série $\sum f(n)$ et l'intégrale $\int_{N_0}^{+\infty} f(t)dt$ sont de même nature. En cas de convergence, on a, pour tout $N \geq N_0$:

$$\int_{N+1}^{+\infty} f(t)dt \leq \sum_{k=N+1}^{+\infty} f(k) \leq \int_{N}^{+\infty} f(t)dt\,.$$

4 - Séries de Riemann

Proposition. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. La série de terme général $\dfrac{1}{n^\alpha}$, $n \in \mathbb{N}^*$ converge ssi $\alpha > 1$.

5 - Séries alternées

Proposition. Soit $\sum u_n$ une série alternée, telle que la suite $(|u_n|)$ converge vers 0 en décroissant. Alors $\sum u_n$ converge. De plus, le *reste d'ordre* n de la série $R_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$ est du signe de u_{n+1} et on a $|R_n| \leq |u_{n+1}|$.

6 - Convergence absolue

Définition. Soit (z_n) une suite complexe. On dit que la série $\sum z_n$ est absolument convergente si la série $\sum |z_n|$ converge.

Proposition. Soit (z_n) une suite (réelle ou complexe). Si $\sum z_n$ est absolument convergente alors $\sum z_n$ est convergente, et on a :

$$\left|\sum_{n=0}^{+\infty} z_n\right| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |z_n|\,.$$

B - Critères de convergence

1 - Règle de Cauchy

Théorème. On considère une série $\sum u_n$ à termes positifs. On suppose que la suite $\left(\sqrt[n]{u_n}\right)$ converge vers l. Alors
- Si $l > 1$, alors la série diverge.
- Si $l < 1$, alors la série converge.

2 - Règle de d'Alembert

Théorème. On considère une série $\sum u_n$ à termes positifs non nuls à partir d'un certain rang. On suppose que la suite $\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ converge vers l. Alors
- Si $l > 1$, alors la série diverge.
- Si $l < 1$, alors la série converge.

3 - Critère d'équivalence

Théorème. On considère deux séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ à termes positifs à partir d'un certain rang. Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ alors $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.

4 - Théorème d'Abel

Théorème. Soient (u_n) et (v_n) deux suites numériques telles que
- La suite des sommes partielles $\left(\sum_{k=0}^{n} v_k\right)$ associée à (v_n) est bornée.
- La série $\sum |u_n - u_{n+1}|$ converge.
- La suite (u_n) converge vers 0.

Alors la série $\sum u_n v_n$ converge.

La démonstration repose sur les points suivants :

(a) **Transformation d'Abel.** Soient (u_n) et (v_n) deux suites numériques. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on pose $V_n = \sum_{k=0}^{n-1} v_k$. Montrer que pour tous entiers p et q vérifiant $q \geq p \geq 0$, on a :

$$\sum_{k=p}^{q} u_k v_k = \sum_{k=p}^{q} u_k \left(V_{k+1} - V_k\right) = \sum_{k=p}^{q} \left(u_k - u_{k+1}\right) V_{k+1} - u_p V_p + u_{q+1} V_{q+1} \,.$$

(b) **Critère de Cauchy.** On dit qu'une série $\sum w_n$ satisfait le critère de Cauchy si :

$$\forall \varepsilon > 0 \,, \exists N \in \mathbb{N} \,, \forall (p,q) \in \mathbb{N}^2 \,, \; q \geq p \geq N \; \Rightarrow \; \left| \sum_{n=p}^{q} w_n \right| \leq \varepsilon \,.$$

Soient (u_n) et (v_n) deux suites numériques vérifiant les conditions du théorème. Monter que $\sum u_n v_n$ vérifie le critère de Cauchy. Conclure. *(Nous admettrons ici qu'une série numérique converge si et seulement si elle vérifie le critère de Cauchy.)*

C - Exercices d'application

Exercice 1 : *Convergence de séries*
Etudier la convergence des séries de terme général :

1 - $u_n = \dfrac{1}{(\ln(n))^n}$, $n \in \mathbb{N}^*$. **2 -** $u_n = \dfrac{n}{2^n}$, $n \in \mathbb{N}$. **3 -** $u_n = \sin(\dfrac{n\pi}{2})$, $n \in \mathbb{N}$.

4 - $u_n = \dfrac{2^n}{n^2} \sin(\alpha)^{2n}$, $n \in \mathbb{N}^*$, $\alpha \in \mathbb{R}$. **5 -** $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\ln(\sqrt{n}+1)}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 2 : *Autour du critère d'équivalence*

1 - On considère (u_n) une suite de réels strictement positifs et on pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \dfrac{u_n}{1+u_n}$.

(a) Montrer que $u_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ si et seulement si $v_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$, et que dans ce cas, $u_n \underset{n \to +\infty}{\sim} v_n$.

(b) En déduire que les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.

2 - On considère les séries de terme général :

$$u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \;, \; n \in \mathbb{N}^* \; \text{ et } v_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n} \;, \; n \in \mathbb{N}^* \,.$$

Montrer que (u_n) et (v_n) sont équivalentes sans être de même nature.

Exercice 3 : *Séries de Bertrand*

Soient α, β deux réels. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \dfrac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$. On étudie les séries de la forme $\sum u_n$, communément appelées *séries de Bertrand.*

1 - On considère le cas $\alpha > 1$. On pose $\gamma = \dfrac{1+\alpha}{2}$. Montrer que la suite $(n^\gamma u_n)$ converge vers 0. En déduire que $\sum u_n$ converge.

2 - Montrer que si $\alpha < 1$, la série $\sum u_n$ diverge.

3 - On considère à présent le cas $\alpha = 1$. On considère la fonction

$$f_\beta : \begin{array}{ccc}]1,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{x(\ln x)^\beta} \end{array}.$$

(a) Montrer que f_β est décroissante à partir d'un certain rang.

(b) Etudier la convergence de $\sum u_n$ dans les cas $\beta < 1$, $\beta > 1$ et $\beta = 1$.
Indication : On pourra penser à utiliser les résultats de comparaison avec une intégrale.

Exercice 4 : *Série harmonique - constante d'Euler*

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $E_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

1 - (a) Montrer que $\displaystyle\int_k^{k+1} \frac{1}{t} dt \leq \frac{1}{k}$ pour tout $k \geq 1$ et que $\displaystyle\frac{1}{k} \leq \int_{k-1}^{k} \frac{1}{t} dt$ pour tout $k \geq 2$.

(b) En déduire que pour tout entier $n \geq 1$, on a : $\ln(n+1) \leq E_n \leq 1 + \ln(n)$, puis que $E_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$.

2 - (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = E_n - \ln(n)$. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers un réel γ compris entre 0 et 1. La constante γ est appelée *constante d'Euler.*

(b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $v_n = E_n - \ln(n+1)$. Montrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont adjacentes, de limite γ.

(c) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $w_n = u_{n+1} - u_n$. Montrer que la série de terme général w_n converge.

(d) En déduire que

$$\gamma = 1 + \sum_{n=2}^{+\infty} \left[\frac{1}{n} - \ln\left(\frac{n}{n-1}\right) \right].$$

Exercice 5 : *Formule de Stirling*

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de terme général $u_n = \dfrac{n!}{\sqrt{n}} \left(\dfrac{e}{n}\right)^n$.

1 - Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $v_n = \ln(u_n)$. Montrer que $v_{n+1} - v_n = \mathcal{O}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$. En déduire que la série de terme général $v_{n+1} - v_n$ converge.

2 - En déduire que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ convergent. On note l la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

3 - Montrer que $n! \underset{n\to+\infty}{\sim} l\sqrt{n}\left(\dfrac{n}{e}\right)^n$.

4 - On rappelle le résultat suivant (obtenu via les intégrales de Wallis - voir fiche INTÉGRATION) :

$$\pi = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{4n}(n!)^4}{n\left[(2n)!\right]^2}.$$

montrer que $l = \sqrt{2\pi}$.