Fiche 3

Suites et séries de fonctions

Notions abordées

- *Suites de fonctions : convergence simple et uniforme.*
- *Séries de fonctions : convergence simple, uniforme, normale.*
- *Résultats de régularité pour les suites et séries.*
- *Critères de convergence (critère de Cauchy, théorème d'Abel).*
- *Applications : polynômes, théorème de Dini, fonction ζ de Riemann, séries alternées, séries trigonométriques.*

PARTIE I : Suites de fonctions

A - Quelques rappels de base

Définitions. Soit $I \subset \mathbb{R}$, soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions et f une fonction définie sur I.

- ***Convergence simple***

On dit que la suite (f_n) converge **simplement** vers f sur I si pour tout $x \in I$, la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(x)$.

- ***Convergence uniforme***

On dit que la suite (f_n) converge **uniformément** vers f sur I si

$$\forall \epsilon > 0\,,\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\,,\ \forall n \geq n_0\,,\ \forall x \in I\,,\ |f_n(x) - f(x)| < \epsilon\,.$$

1 - **(a)** Montrer que la suite de fonctions définie sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = \dfrac{x}{n}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ converge simplement vers une fonction f que l'on précisera.

(b) Montrer que (f_n) ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}$, mais que c'est le cas sur $[-1, 1]$.

2 - Etudier la convergence simple et uniforme des suites de fonctions définies par :

(a) $\forall x \in I\,,\ f_n(x) = x^n\,,$ avec $I = [0,1]$, puis $I = [0, 1-\epsilon]\,,\ \epsilon > 0\,.$

(b) $\forall x \in I\,, f_n(x) = \dfrac{x^n}{1+x^n}\,,$ avec $I = [0,1]$, puis $I = [0, 1-\epsilon]\,,\ \epsilon > 0\,.$

(c) $\forall x \in I\,, f_n(x) = \arctan\left(\dfrac{x+n}{x}\right)\,,$ avec $I = \mathbb{R}_+^*$, puis $I =]0, M]\,,\ M > 0\,.$

B - Résultats de régularité

Théorème (continuité). Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions telle que :

- $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $I \subset \mathbb{R}$.
- Toutes les f_n sont continues en $x_0 \in I$.

Alors f est continue en x_0. En d'autres termes, on a :

$$\lim_{x\to x_0}\left(\lim_{n\to+\infty} f_n(x)\right) = \lim_{n\to+\infty}\left(\lim_{x\to x_0} f_n(x)\right)\,.$$

Théorème (intégration). Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues sur un segment $[a,b] \subset \mathbb{R}$ telle que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f. On a :

$$\int_a^b f_n(t)dt \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_a^b f(t)dt\,.$$

Théorème (dérivabilité). Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $I \subset \mathbb{R}$ telle que :

- $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers f sur I.
- $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers g sur I.

Alors f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I, et on a $f' = g$.

1 - Démontrer le théorème de continuité *(on pourra penser à utiliser l'inégalité triangulaire).*

2 - Démontrer le théorème relatif à l'intégration.

3 - Démontrer le théorème relatif à la dérivabilité.
Indication : pour $x_0 \in [a,b] \subset I$ on a :

$$\forall x \in [a,b]\,,\ f_n(x) = f_n(x_0) + \int_{x_0}^{x} f_n'(t)dt\,.$$

C - Exercices d'application

Exercice 1 : *Convergence uniforme et dérivabilité*

On considère la suite de fonctions définie pour $n \geq 1$ par :

$$\begin{aligned} f_n : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}\,. \end{aligned}$$

1 - Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers une fonction f que l'on précisera.

2 - Etudier la convergence uniforme de la suite de fonctions $\left(f_n'\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Exercice 2 : *Convergence uniforme et intégration*

On considère la suite de fonctions définie pour $n \in \mathbb{N}^*$ par :

$$\begin{aligned} f_n : [0,1] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \begin{cases} n^2x(1-nx) \text{ si } x \in [0,1/n] \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}. \end{aligned}$$

1 - Etudier la convergence simple de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

2 - Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\int_0^1 f_n(t)dt$. En déduire que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ n'est pas uniformément convergente.

3 - A-t-on le même résultat avec $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie sur $[a,1]$ avec $0 < a < 1$?

Exercice 3 : *Limite uniforme de polynômes*

On considère une suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de polynômes convergeant uniformément vers une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

1 - Montrer qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq N$ et tout $x \in \mathbb{R}$, on ait : $|P_n(x) - P_N(x)| \leq 1$.

2 - Soit $n \geq N$. Montrer que le polynôme $Q_n = P_n - P_N$ est constant.

3 - Montrer que f est un polynôme.

Exercice 4 : *Théorème de Dini*

On considère (f_n) une suite croissante de fonctions continues (*i. e.* $f_n \leq f_{n+1}\ \forall n \in \mathbb{N}$) définies sur $[a, b]$. On suppose que (f_n) converge simplement vers une fonction f continue. Pour tout $\varepsilon > 0$ et $n \geq 1$, on pose

$$K_n(\varepsilon) = \{x \in [a,b]\ ,\ |f(x) - f_n(x)| \geq \varepsilon\}\ .$$

1 - Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $f_n \leq f$, puis que $K_{n+1}(\varepsilon) \subset K_n(\varepsilon)$.

2 - Montrer que

$$\mathcal{P} := (\forall \varepsilon > 0\,,\, \exists N \in \mathbb{N}\,,\, K_N(\varepsilon) = \emptyset) \Rightarrow (f_n) \text{ converge uniformément vers } f\,.$$

3 - On raisonne à présent par l'absurde, et on suppose que $\mathcal{P}$ n'est pas vérifiée.

- **(a)** Montrer qu'il existe $\varepsilon > 0$ et une suite convergente $(x_{\Phi(n)})$ vérifiant, pour tout $n \in \mathbb{N}$
$$f(x_{\Phi(n)}) - f_{\Phi(n)}(x_{\Phi(n)}) \geq \varepsilon\,.$$
- **(b)** Montrer qu'il existe $x \in [a, b]$ tel que pour tout $p \in \mathbb{N}$, on a
$$f(x) - f_p(x) \geq \varepsilon\,.$$
- **(c)** En déduire que la convergence simple de (f_n) implique $\mathcal{P}$.

Exercice 5 : *Critère de Cauchy*

Montrer la proposition suivante :

Proposition (Critère de Cauchy). On a équivalence entre

- $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur I.
- $\forall \varepsilon > 0\,,\, \exists N \in \mathbb{N}\,,\, (p, q \geq N) \Rightarrow (\forall x \in I, |f_p(x) - f_q(x)| < \varepsilon)\ .$

PARTIE II : Séries de fonctions

A - Rappels de base

Définitions. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur $I \subset \mathbb{R}$. On associe à $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la série de fonctions $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ correspondant à la *suite des sommes partielles*, définie pour tout $x \in I$ par :

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k(x)\,.$$

- ***Convergence simple et uniforme***

On dit que la série de fonctions $\sum f_n$ converge **simplement** (resp. **uniformément**) si la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge **simplement** (resp. **uniformément**) sur I.

- ***Convergence normale***

On dit que la série de fonctions $\sum f_n$ converge **normalement** si la série $\sum \|f_n\|_\infty$ est convergente.

1 - Montrer que la série $\sum x^{2n}$ converge simplement sur $[0,1[$, et normalement sur tout intervalle de la forme $[0,a]$ avec $0 < a < 1$.

2 - Etudier la convergence normale des séries de fonctions suivantes :

(a) $\sum \frac{\sin(nx)}{n^2}$, $n \geq 1$, $x \in \mathbb{R}$.

(b) $\sum \frac{1}{x^2+n^2}$, $n \geq 1$, $x \in \mathbb{R}$.

(c) $\sum \left(\frac{x}{1+x^2}\right)^n$, $n \geq 0$, $x \in \mathbb{R}$.

3 - On considère la suite de fonctions définie pour $n \geq 1$ par :

$$\begin{aligned} f_n : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{e^{-nx}\sin(nx)}{\ln(n+1)}. \end{aligned}$$

(a) Soit λ un réel strictement positif. Pour $n \geq 1$ on définit $u_n = n^2 \frac{e^{-n\lambda}}{\ln(n+1)}$. Montrer que la suite (u_n) converge vers 0.

(b) En déduire que la série $\sum_{n\geq 1} f_n$ converge normalement sur tout intervalle de la forme $[a,+\infty]$, avec a un réel strictement positif.

B - Résultats de régularité

Il s'agit simplement de reformuler les théorèmes de la partie **A** dans le cadre des séries de fonctions.

Théorème (continuité). Soit $\sum f_n$ une série de fonctions telle que :

- $\sum f_n$ converge uniformément sur $I \subset \mathbb{R}$.
- Toutes les f_n sont continues en $x_0 \in I$.

Alors la fonction somme $S = \sum_{n=0}^{\infty} f_n$ est continue en x_0. Plus précisément, on a :

$$\lim_{x\to x_0}\left(\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\lim_{x\to x_0} f_n(x)\right).$$

Théorème (intégration). Soit $\sum f_n$ une série de fonctions telle que :

- $\sum f_n$ converge uniformément sur $I \subset \mathbb{R}$.
- Toutes les f_n sont continues sur I.

Alors la fonction somme $S = \sum_{n=0}^{\infty} f_n$ est continue sur I, et pour tout $[a,b] \subset I$, on a :

$$\int_a^b \sum_{n=0}^{\infty} f_n(t)dt = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\int_a^b f_n(t)dt\right).$$

Théorème (dérivabilité). Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $I \subset \mathbb{R}$ telle que :

- $\sum f_n$ converge simplement vers S sur I.
- $\sum f_n'$ converge uniformément vers T sur I.

Alors S est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I, et on a $S' = T$.

Applications.

1 - Montrer que l'application $x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\exp(-x^2)}{(2n+1)^3}$ est continue sur $\mathbb{R}$.

2 - Montrer que l'application $x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(x)}{2^n}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

3 - On considère la suite de fonctions définie pour $n \geq 1$ par :

$$\begin{aligned} f_n : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{\sin(nx)}{n^3}. \end{aligned}$$

(a) Montrer que la série $\sum_{n\geq 1} f_n$ converge sur $\mathbb{R}$. On notera f sa somme.

(b) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.

(c) Montrer que

$$\int_0^{\pi} f(t)dt = 2\sum_{n\geq 1} \frac{1}{(2n-1)^4}.$$

(d) Montrer que

$$\forall\, x \in \mathbb{R}\ ,\ f'(x) = \sum_{n\geq 1} \frac{\cos(nx)}{n^2}.$$

(e) En déduire

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sum_{n\geq 1} \frac{\cos(nx)}{n^2} = \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}.$$

C - Critères de convergence

A titre d'exercice, on pourra proposer une démonstration des résultats suivants (à connaître).

1 - Condition nécessaire pour la convergence uniforme

Proposition. Si $\sum f_n$ converge uniformément sur $I \subset \mathbb{R}$, alors (f_n) converge uniformément vers 0 sur sur I.

2 - Caractérisation de la convergence uniforme

Proposition. On considère une série de fonctions $\sum f_n$ convergeant simplement sur $I \subset \mathbb{R}$.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $p \in \mathbb{N}$, on note $R_p(x) = \sum_{n=p+1}^{\infty} f_n(x)$ la suite des restes. Si (R_p) converge uniformément vers 0 sur I, alors $\sum_{n\geq 0} f_n$ converge uniformément sur I.

3 - Critère de Cauchy (hors programme)

Proposition. On a équivalence entre :

- $\sum f_n$ converge uniformément vers f sur $I \subset \mathbb{R}$.
- $\forall \varepsilon > 0\,,\, \exists N \in \mathbb{N}\,,\, (n \geq N) \Rightarrow (\forall k \in \mathbb{N}^*\,,\, \forall x \in I\,,\, |f_{n+1}(x) + \cdots + f_{n+k}(x)| < \varepsilon)$.

4 - Convergence normale et convergence uniforme

Proposition. Si une série de fonctions converge normalement, alors elle converge uniformément.

5 - Théorème d'Abel

Théorème. On considère deux suites de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies sur $I \subset \mathbb{R}$ telles que :

- $\forall x \in I$, la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante de réels strictement positifs.
- $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers la fonction nulle.
- Les sommes partielles de $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont uniformément bornées :

$$\exists\, M > 0\,,\, \forall\, n \in \mathbb{N}\,,\, \forall\, x \in I\,,\, |g_0(x) + \cdots + g_n(x)| < M\,.$$

Alors $\sum f_n g_n$ converge uniformément.

PARTIE III : Applications

<u>**Exercice 1 :**</u> *Exemples et contrexemples*

1 - On considère la suite de fonctions $\sum f_n$ avec :

$$f_n(x) = \frac{nx}{1 + n^2x^2}\,, \quad x \geq 0\,.$$

Montrer que la suite (f_n) converge simplement sur $\mathbb{R}_+$, mais pas uniformément sur cet intervalle.

2 - On considère la série de fonctions $\sum f_n$ avec :

$$f_n(x) = \frac{(-1)^n}{n + x}\,, \quad x \geq 0\,.$$

Montrer que la série $\sum f_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}_+$, mais pas normalement sur cet intervalle.

3 - On considère la série de fonctions $\sum f_n$ avec :

$$f_n(x) = \frac{x}{n^2 + x^2}\,, \quad x \geq 0\,.$$

(a) Montrer que la série $\sum f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$.

(b) Montrer que pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, et tout $k \in [\![N, 2N]\!]$, on a $\dfrac{N}{N^2 + k^2} \geq \dfrac{1}{5N}$.

(c) En déduire que la série $\sum f_n$ ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}_+$.
Indication : on pourra raisonner par l'absurde et considérer $\sup_{x\in R_+} |R_p(x)|$*, où* $R_p(x) = \sum_{n=p+1}^{\infty} f_n(x)$ *pour tout* $p \in \mathbb{N}$ *et* $x \in \mathbb{R}_+$.

Exercice 2 : *Fonction ζ de Riemann*

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose :

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}.$$

1 - Montrer que ζ est définie sur $]1, +\infty[$, et de classe $\mathcal{C}^1$ sur tout intervalle de la forme $[a, +\infty[$ avec $a > 1$.

2 - Montrer que ζ est strictement décroissante sur $[a, +\infty[$.

3 - Déterminer la limite de ζ en $+\infty$.

4 - **(a)** Montrer que pour tout $x > 1$ on a :

$$\int_1^{\infty} \frac{dt}{t^x} \leq \zeta(x) \leq 1 + \int_1^{\infty} \frac{dt}{t^x}.$$

(b) En déduire que $\zeta(x) \underset{x \to 1}{\sim} \dfrac{1}{x-1}$.

5 - On considère la série de fonctions $\sum f_n$ avec, pour $n \geq 1$:

$$f_n(x) = \frac{(-1)^n}{n^x}, \quad x \geq 0.$$

(a) Montrer que $f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$ est définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

(b) Montrer que pour tout $x > 1$, on a $f(x) = (2^{1-x} - 1)\zeta(x)$.

Exercice 3 : *Séries alternées*

On considère la série de fonctions $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{x+n}$.

1 - Montrer que S est définie sur $I =]-1, +\infty[$.

2 - Montrer que S est continue sur I.

3 - Montrer que S est dérivable sur I et calculer sa dérivée. En déduire que S est croissante.

4 - Déterminer les limites de S en-1 et $+\infty$.

Exercice 4 : *Séries trigonométriques*

On considère la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} f_n$ avec :

$$f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{n^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

1 - Montrer cette série converge uniformément sur $\mathbb{R}$. On note S sa somme.

2 - Montrer $\sum_{n \geq 1} f_n'$ converge simplement sur tout intervalle de la forme $]2k\pi, 2(k+1)\pi[$, $k \in \mathbb{Z}$.

3 - Montrer que S est de classe $\mathcal{C}^1$ sur tout intervalle de la forme $]2k\pi + \varepsilon, 2(k+1)\pi - \varepsilon[$, $k \in \mathbb{Z}$, avec $\varepsilon > 0$.
Indication : On pourra utiliser le théorème d'Abel pour établir la convergence uniforme de $\sum_{n \geq 1} f_n'$.