

## Activités de recherche

### Arnaud DURAN

Né le 11 juin 1984

Doctorat obtenu le 17 octobre 2014

Qualification CNU 26 obtenue le 4 février 2015

**Discipline** : Calcul scientifique, EDP,  
analyse et simulation numérique.



**Adresse professionnelle** : INSA Toulouse, 135 Avenue de Rangueil,  
31400 Toulouse

**Adresse personnelle** : 29 rue Pradal, Résidence George V,  
31400 Toulouse

**Contact** : Téléphone bureau : (+33) 5 62 80 99 19  
Téléphone portable : (+33) 6 77 95 80 44  
Mail : [arnaud.duran@insa-toulouse.fr](mailto:arnaud.duran@insa-toulouse.fr)  
Site Web : <http://www.math.univ-toulouse.fr/~aduran>



## Table des matières



<b>1</b>	<b>Présentation Générale</b>	<b>4</b>
1.1	<i>Enseignement</i> . . . . .	4
1.2	<i>Recherche</i> . . . . .	4
<b>2</b>	<b>Activités de recherche</b>	<b>7</b>
2.1	<i>Stabilité, variations du fond et friction [Doctorat]</i> . . . . .	7
2.2	<i>Application aux équations Green-Naghdi [Doctorat]</i> . . . . .	9
2.3	<i>Schémas bas-Froude pour modèles stratifiés [Post-Doctorat]</i> . . . . .	11
<b>3</b>	<b>Perspectives</b>	<b>14</b>
3.1	<i>Le code WaveBox [Continuité Doctorat]</i> . . . . .	14
3.2	<i>Collaboration avec le SHOM [Continuité Post-Doctorat]</i> . . . . .	16
<b>4</b>	<b>Publications</b>	<b>18</b>
<b>5</b>	<b>Développement</b>	<b>19</b>
5.1	<i>Code SW-FV2D</i> . . . . .	19
5.2	<i>Code SW-DG2D</i> . . . . .	19
5.3	<i>Code GN-DG1D</i> . . . . .	20
5.4	<i>WaveBox</i> . . . . .	20
5.5	<i>Autres développements</i> . . . . .	21

## Fiche de synthèse

### *Situation actuelle*

Depuis **Octobre 2014** : Post-Doctorant à l'*Institut National des Sciences Appliquées (INSA)* de **Toulouse**. Collaboration avec le *Service Hydrographique et Océanographique de la Marine (SHOM)*.

### *Thèmes de recherche*

- Analyse, modélisation et simulation d'écoulements à surface libre.
- Equations Shallow Water (SW), Shallow Water multicouches, Equations dispersives.
- Méthodes Volumes Finis, Différences Finies et Galerkin Discontinu.
- Schémas numériques 1d et 2d sur grilles cartésiennes, non structurées et maillage décalé.
- Stabilité linéaire et non linéaire, schémas "*Well-Balanced*", schémas entropiques.
- Schémas "*Asymptotic Preserving*", bas-Mach, bas-Froude.
- Inclusion des termes source raides.
- Conditions aux limites.

### *Enseignement*

- **Vacataire** à l'INSA Toulouse. TP d'Analyse Numérique en 3eme année (**Python**).  
*Volume horaire* : 48h. *Sept. 2015 - Fev. 2016*
- **Allocataire-Moniteur** à Polytech' Montpellier (UM II). Chargé de Cours/TD.  
*Volume horaire total* : 192h sur 3 ans. *Sept. 2011 - Sept. 2014*
- **Professeur de Mathématiques**.
  - *Collège Henri Barbusse, Saint-Denis (93)*. *Sept. 2008 - Sept. 2009*
  - *Lycée Déodat de Séverac, Céret (66)*. *Sept. 2007 - Sept. 2008*

### *Formation et diplômes*

- **Doctorat** en Mathématiques Appliquées de l'Université Montpellier II.  
Thèse encadrée par Fabien MARCHE et Pascal AZERAD. Soutenue le 17 octobre 2014.
- **Master 2** Mathématiques obtenu en 2011 à l'Université Montpellier 2.
- **Agrégation externe** et CAPES de Mathématiques, obtenus respectivement en 2011 et 2007.

### *Collaborations et Communication scientifique*

- 16 exposés dans des conférences et séminaires.
- Membre du groupe de travail **MathOcéan** : <http://mathocean.math.cnrs.fr>
- Membre de l'équipe **INRIA LEMON** de Janvier 2014 à Octobre 2014.

### **Publications**

- 5 articles dans des revues à comité de lecture (JCP(2), CiCP, C&F, IJNMF).
- 1 proceeding dans une conférence internationale.
- 2 articles soumis.

### **Développement** : Construction de quatre codes de calcul.

- **SW-FV2D** : Solveur *Volumes Finis* pour les éq. SW 2d sur *maillages non structurés*.
- **SW-DG2D** : Code *discontinuous Galerkin* pour les éq. SW sur *maillages triangulaires*.
- **GN-DG1D** : Code *dG* pour les éq. *Green-Naghdi* 1d.
- **WaveBox** : *Extension 2d* du code précédent sur maillages triangulaires.



# 1 - Présentation Générale

Après avoir exercé deux années en tant que professeur certifié de Mathématiques, j'ai sollicité en 2009 deux années de disponibilité afin de suivre un Master 2 à l'Université Montpellier II et me préparer simultanément au concours de l'Agrégation. A l'issue de l'année scolaire 2010 - 2011, l'admission au concours et l'obtention d'une bourse de thèse m'ont permis de poursuivre mon cursus universitaire, tout en gardant contact avec l'enseignement grâce aux missions de monitorat.

Ma **thèse**, intitulée :

*“Simulation numérique d'écoulements type “depth averaged” : une classe de schémas Volumes Finis et Galerkin Discontinu”*

a débuté en octobre 2011, au sein de l'*Institut de Mathématiques et Modélisation de Montpellier (I3M)*, et a été encadrée par **Fabien Marche**. La soutenance a eu lieu le 17 octobre 2014.

Depuis octobre 2014, je suis **post-doctorant** à l'**INSA de Toulouse**. Je travaille au sein de l'équipe de **Jean-Paul Vila** et **Pascal Noble**, en collaboration avec le *Service Hydrographique et Océanographique de la Marine (SHOM)*.

---

## 1.1 Enseignement

Mon expérience dans l'enseignement a débuté au cours de l'année scolaire 2007 - 2008. Suite à mon admission au CAPES de Mathématiques, j'ai effectué mon stage de validation pratique IUFM dans le **lycée Déodat de Séverac** à Céret (66). J'avais en charge une classe de seconde. Durant cette année, j'ai aussi donné quelques heures de cours en collège (une dizaine de séances en classe de 3ème).

J'ai été affecté l'année suivante dans l'Académie de Créteil, au **collège Henri Barbusse** de Saint - Denis (93). J'ai eu en charge deux classes de 4ème, deux classes de 5ème, ainsi qu'une classe de 3ème pour des cours de soutien, à raison d'une heure par semaine.

Allocataire-moniteur durant ma thèse, j'ai été affecté à l'école d'ingénieurs **Polytech' Montpellier**. Durant trois années, j'ai été chargé de cours/TD pour un enseignement généraliste d'Algèbre et d'Analyse auprès d'étudiants de première année **PEIP** (*Parcours des Ecoles d'Ingénieur Polytech'*), pour un volume horaire de 64 heures par an.

Durant ma deuxième année de post-doctorat à l'**INSA**, j'ai encadré des TP d'Analyse Numérique *Python* en **3ème année IMACS** (*Ingénierie des Matériaux, Composants et Systèmes*) au premier semestre. J'ai eu en charge deux groupes, pour un total de 48 heures d'enseignement.

---

## 1.2 Recherche

Les principaux aspects de mes travaux de recherche sont liés au développement et l'analyse de méthodes numériques dédiées à la simulation de modèles d'écoulement à surface libre. Au cours de ma thèse je me suis principalement intéressé aux équations Shallow Water (SW) et aux modèles dispersifs (en particulier au modèle fortement non linéaire Green - Naghdi (GN)). Je

travaille actuellement sur des modèles d'écoulement stratifiés (équations Shallow Water Multicouches (SWM)) dans le cadre de mon post-doctorat. A l'heure actuelle ces types de modèle font partie de ceux les plus couramment utilisés pour étudier les mécanismes hydrodynamiques en océanographie.

Les premières étapes de mes activités furent consacrées aux équations SW. Jouissant d'une formulation simple et d'un domaine de validité relativement large, ces équations sont très fréquemment utilisées pour étudier la circulation des masses d'eau dans les rivières et les océans dans un contexte d'eau peu profonde, c'est à dire lorsque la profondeur d'eau est petite devant la longueur d'onde caractéristique de l'écoulement. Sous sa forme conservative, le modèle consiste en un système d'équations aux dérivées partielles couplant la hauteur d'eau  $h$  et le débit  $\mathbf{q} = {}^t(q_x, q_y)$ . Dans un contexte 2d, en notant  $z$  une paramétrisation de la topographie, et  $\mathbf{u} = {}^t(u, v)$  le champ de vitesse, ces équations prennent la forme suivante (voir Fig. 1 pour une configuration 1d) :

$$U_t + \nabla \cdot G(U) = B(U, z),$$

avec 
$$U = \begin{pmatrix} h \\ q_x \\ q_y \end{pmatrix}, \quad G(U) = \begin{pmatrix} q_x & q_y \\ uq_x + \frac{1}{2}gh^2 & vq_x \\ uq_y & vq_y + \frac{1}{2}gh^2 \end{pmatrix}, \quad B(U, z) = \begin{pmatrix} 0 \\ -ghz_x \\ -ghz_y \end{pmatrix}.$$

Les difficultés inhérentes à la construction de schémas numériques pour approcher les solutions du système sont multiples, et de nature très diverses. S'agissant ici d'une loi de conservation hyperbolique non linéaire, l'un des principaux enjeux repose sur la mise en place de certains critères de stabilité :

- Préservation des états d'équilibre (*Well - Balancing*).
- Préservation de la positivité de la hauteur d'eau (*Robustesse*).
- Inégalités d'entropie discrètes.

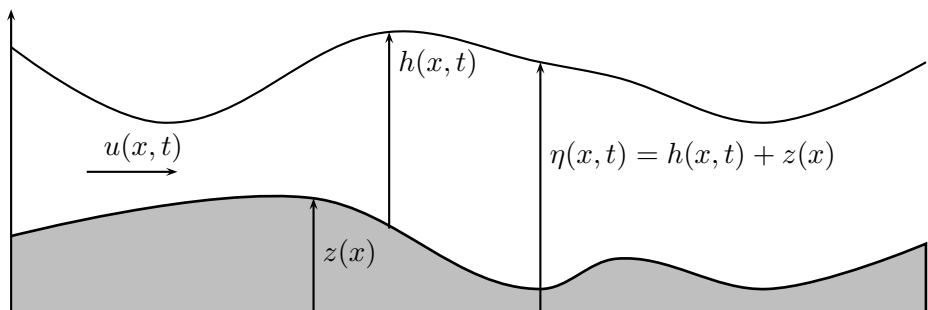


FIGURE 1 – Variables non conservatives pour les équations Shallow Water.

Aujourd'hui, en dépit de l'abondance des travaux consacrés aux équations SW, vérifier l'ensemble de ces conditions dans un contexte 2d sur maillages non structurés est loin d'être trivial. Les méthodes numériques développées durant la première partie de ma thèse ont eu pour principal objectif d'intégrer au mieux ces aspects. Dès lors, je me suis attelé à étendre ces propriétés à des systèmes dispersifs (équations Green-Naghdi), dont la mise en oeuvre numérique s'avère être d'un autre degré de complexité. Ces travaux ont très récemment abouti à la mise en place du premier modèle numérique 2d d'ordre arbitraire sur maillages triangulaires pour les équations dispersives fortement non linéaires : [WaveBox](#).

Depuis octobre 2014, je suis post-doctorant à l'INSA de Toulouse dans le cadre d'un programme de recherche financé par le SHOM. L'objectif est de développer des méthodes numériques pour un modèle d'écoulement océanographique stratifié (Shallow Water Multicouches) en

vue de leur intégration à la plateforme de prévision opérationnelle du SHOM (HYCOM - *HYbrid Coordinate Ocean Model*). Dans ce contexte applicatif, deux critères de stabilité doivent faire l'objet d'un intérêt particulier, à savoir la décroissance de l'énergie mécanique discrète (schémas *entropiques*), et la consistance avec les régimes *bas-Froude* vérifiés au niveau continu (schémas "*Asymptotic Preserving*"). Dans cette optique, plusieurs approches ont été proposées, dans un cadre semi-implicite et explicite, à la fois en colocalisé et sur mailles décalées. Les efforts sont aussi orientés sur la mise en place d'une méthode numérique permettant de gérer les conditions aux limites ouvertes sur ce modèle.



Dans la section [Recherche](#) je détaille les trois contributions majeures liées à ces travaux, à savoir :

- 1- **Stabilité - Traitement des variations du fond et termes de friction.**
- 2- **Extension aux équations dispersives.**
- 3- **Schémas *bas-Froude* pour un modèle d'écoulement stratifié.**



Au cours de mes recherches, quatre codes de calcul ont été intégralement développés, aptes à être utilisés pour des applications réalistes :

- **SW-FV2D** : Solveur Volumes Finis pour les équations Shallow Water sur maillages non structurés.
- **SW-DG2D** : Solveur discontinuous Galerkin pour les équations Shallow Water sur maillages triangulaires.
- **GN-DG1D** : Solveur discontinuous Galerkin 1d pour les équations dispersives fortement non linéaires (Green-Naghdi) .
- **WaveBox** : Extension 2d du code précédent sur maillages triangulaires.

Leurs caractéristiques sont données dans la section [Développement](#).



## 2 - Activités de recherche

### 2.1 Stabilité, variations du fond et friction [Doctorat]

**Description :** Devant la difficulté que représente la préservation de l'ensemble des états d'équilibre, il est d'usage de se placer dans le contexte simplifié dit du “*lac au repos*” :

$$h + z = cte \quad , \quad \mathbf{u} = 0, \quad (1)$$

qui représente déjà un critère de stabilité relativement discriminant. La préservation de cet état d'équilibre admet une interprétation simple, dans la mesure où il ne paraît pas raisonnable qu'un schéma numérique puisse générer de mouvement partant d'un état initial à niveau d'eau total constant et vitesse nulle, en l'absence de forçage extérieur. Depuis les travaux de Bermudez et Vazquez [1], de nombreux schémas ont été proposés permettant de préserver cet état d'équilibre particulier (on parle de “*C - propriété*”).

Une idée intéressante pour minimiser les efforts dans l'obtention de cette propriété consiste à considérer l'élévation totale de la surface libre (formellement  $\eta = h + z$ ) à la place de la hauteur au cours de la construction du schéma numérique. Ces approches trouvent leurs racines dans plusieurs travaux datant du début des années 2000 ([16, 26, 28, 30, 33]). Plus récemment, cette quantité est intégrée directement dans le modèle, tout en préservant la structure hyperbolique du système (équations “*pre - balanced*” [18]) :

$$V_t + \nabla \cdot H(V, z) = S(V, z), \quad (2)$$

où

$$V = \begin{pmatrix} \eta \\ q_x \\ q_y \end{pmatrix}, \quad H(V, z) = \begin{pmatrix} q_x & q_y \\ uq_x + \frac{1}{2}g(\eta^2 - 2\eta z) & vq_x \\ uq_y & vq_y + \frac{1}{2}g(\eta^2 - 2\eta z) \end{pmatrix}, \quad (3)$$

et le terme source relatif à la topographie s'écrit :  $S(V, z) = {}^t(0, -g\eta z_x, -g\eta z_y)$ . Ces équations sont équivalentes aux équations primales au sens faible pour des topographies régulières.

**Objectifs :** Partant de cette formulation, l'objectif était de prolonger les travaux Volumes Finis existants en 1d basés sur ce modèle ([19]) au contexte 2d non structuré. Ces travaux ont abouti à l'élaboration de deux codes de calcul Volumes Finis (code **SW-FV2D** et publication associée [-6-]) et Galerkin Discontinu (code **SW-DG2D** et publication associée [-5-]), intégralement développés au cours de la thèse, et désormais utilisables pour la simulation de mécanismes hydrodynamiques concrets.

L'objectif secondaire réside dans la mise en place d'une méthode efficace pour gérer les termes de friction, notamment au voisinage des fronts secs.

**Démarche scientifique :** Dans un contexte 2d non structuré, la principale difficulté tient dans la préservation des critères de stabilité (*Well-Balancing* et *robustesse*), notamment lorsque l'on envisage de monter en ordre (schémas MUSCL ou dG), ce qui est l'un des objectifs visés. Traditionnellement, l'implémentation de méthodes d'ordre élevé sur ce type de schémas doit s'accompagner de l'introduction de termes sources correctifs et/ou d'une modification des flux numériques, principalement afin de préserver les états d'équilibre. Dans ce formalisme, la stabilité du schéma est inconditionnelle : des reconstructions MUSCL ou discrétisations dG d'ordre arbitraire peuvent être envisagés sans aucune modification structurelle du schéma, sous réserve que l'approche du premier ordre soit stable. C'est ce qui fait la particularité et l'intérêt de cette approche. Dans

un souci d'application aux situations réalistes, les efforts d'analyse se sont aussi portés sur la préservation de la hauteur d'eau (gestion des zones sèches). A cet effet les technologies proposées par C. Berthon [2] pour les schémas VF MUSCL et les reconstructions basées sur le principe du maximum [31, 32] pour les schémas dG ont dû être adaptées.

C'est par ailleurs dans ce contexte délicat du traitement des profondeurs évanescentes qu'a été abordé le problème de l'inclusion des termes de friction, inévitable dès lors que l'on s'attelle à la simulation de situations réalistes (écoulements dans les rivières, océanographie côtière, ...). Si la présence de faibles hauteurs d'eau menace la stabilité des schémas au voisinage des zones incriminées, cette menace est d'autant plus prononcée lorsque les phénomènes de friction sont pris en compte. Pour fixer les idées, si l'on considère la loi de Manning, qui est la plus couramment utilisée, les équations (1.2) se réécrivent avec un nouveau terme source :

$$U_t + \nabla \cdot G(U) = B(U, z) + E(U), \quad (4)$$

où

$$E(U) = - \begin{pmatrix} 0 \\ n^2 \frac{\|\mathbf{q}\|}{h^{10/3}} q_x \\ n^2 \frac{\|\mathbf{q}\|}{h^{10/3}} q_y \end{pmatrix}, \quad (5)$$

et l'on s'expose naturellement à la singularité  $h = 0$ . Il s'agit donc de proposer un schéma permettant d'assurer des calculs stables au voisinage des zones sèches tout en maintenant un bon niveau de précision. L'objectif visé est la mise en place d'un schéma type "*Asymptotic Preserving*", dans la continuité des travaux Volumes Finis 1d menés dans [4]. Le point de départ repose sur une réécriture du terme de friction sous la forme :

$$E(U) = \sigma(R(U) - U), \quad (6)$$

avec dans le cas présent  $R(U) = {}^t(h, q_x - \|\mathbf{q}\|q_x, q_y - \|\mathbf{q}\|q_y)$  et  $\sigma = \sigma(h) = \frac{n^2}{h^{10/3}}$ . Cette formulation rentre ainsi dans le cadre des travaux proposés dans [3]. Les auteurs y développent une méthode pour traiter cette classe générale de termes source, basée sur un solveur HLL modifié. Cette approche permet, dans un premier temps, de discrétiser le terme de friction en s'exonérant du problème des divisions par  $h$ . Il en résulte un schéma présentant un excellent comportement au niveau des frontières sèches.

En second lieu, une calibration appropriée des paramètres intervenant dans le schéma de friction permet de dégénérer au niveau discret vers le régime diffusif non linéaire vérifié par les équations continues :

$$\partial_t h - \nabla \cdot \left( \frac{\sqrt{h}}{\rho(h)\sqrt{\|\nabla\eta\|}} \nabla\eta \right) = 0, \quad (7)$$

où  $g\rho^2(h) = \frac{n^2}{h^{10/3}}$ . L'élaboration d'un schéma jouissant d'une telle propriété représente une nouveauté dans le contexte 2d non structuré. Nous avons pu identifier des situations précises dans lesquelles ce nouveau schéma semble se distinguer des approches classiques. Sans surprise, ces disparités apparaissent assez clairement lorsque l'on s'approche du régime asymptotique. C'est typiquement le cas pour des applications faisant intervenir de faibles hauteur d'eau et où les termes de résistance vont avoir tendance à contrôler l'évolution de l'écoulement. Cette partie est de nature prospective et notons qu'en l'absence de solution exacte dans ce contexte, de cas tests expérimentaux suffisamment discriminants et autres résultats de référence, il est difficile pour l'instant d'évaluer avec plus de précision les bénéfices réels apportés par un telle propriété. Cette collaboration a abouti à la publication de l'article [-2-]. Soulignons qu'en parallèle, ce travail a pu



être en partie étendu à d'autres approches, notamment celle proposée dans [-6-], ce qui a permis d'apporter de nettes améliorations au schéma Volumes Finis élaboré au début de ma thèse. Ces aspects sont détaillés dans un autre papier récent [-4-].

**Validation et impact :** Les codes de calcul Volumes Finis et Galerkin Discontinu ont été développés en langage FORTRAN. Leurs caractéristiques sont détaillées dans la Section **Codes**. Leurs propriétés de stabilité les rendent tout à fait aptes à être utilisés pour des applications en océanographie et l'hydraulique des écoulements en rivière. Ces travaux sont aujourd'hui largement référencés et des solveurs bâtis sur ces schémas ont été utilisés dans plusieurs travaux récents [20, 22, 17].

## — 2.2 Application aux équations Green-Naghdi — [Doctorat]

**Description :** Au cours de ma dernière année de thèse, mes investigations se sont orientées sur les modèles dispersifs fortement non-linéaires. Il s'agit de prendre en compte les fortes non linéarités apparaissant dans de nombreux contextes applicatifs (par exemple en amont du déferlement des vagues) et qui ne sont pas capturées par les équations SW. Plus précisément l'objectif visé est la construction de schémas numériques pour une nouvelle classe de systèmes type Green-Naghdi, récemment introduits par David Lannes et Fabien Marche [17], et héritant des propriétés de stabilité évoquées précédemment dans le contexte SW. L'une des caractéristiques majeures de ces modèles tient dans l'expression de l'opérateur différentiel agissant sur l'équation de quantité de mouvement, car contrairement au cas classique, celui-ci ne dépend pas du temps. En pratique, ceci offre un gain considérable en terme de temps de calcul, et permet ainsi d'orienter le code vers des résolutions d'ordre élevé.

**Objectifs :** Ces recherches ont abouti au développement d'une approche dG pour les modèles Green-Naghdi 1d et 2d dérivés dans [17]. Sur cette base, un premier code de calcul 1d type RKDG a été entièrement implémenté : **GN-DG1D**. La méthode, de précision arbitraire, a pour caractéristique de préserver les états d'équilibre statiques et la positivité de la hauteur d'eau à tout ordre. Ces propriétés rendent le code extrêmement robuste et précis dans des contextes réalistes. Ces travaux ont fait l'objet de la publication [-3-]. Devant la qualité des résultats obtenus, ce code a très récemment été étendu en 2d sur maillages triangulaires [-8-]. A ce jour, **WaveBox** est le seul solveur d'ordre arbitraire pour les équations dispersives fortement non linéaires sur ce type de géométries. Les propriétés de stabilité qui sont satisfaites le rendent parfaitement opérationnel pour la simulation en océanographie côtière.

**Démarche scientifique :** L'intégration numérique des équations GN concentre de nombreuses difficultés numériques (dérivées d'ordre élevé, termes non linéaires et non conservatifs, traitement du déferlement,...). Dans un premier temps l'idée est de se ramener au contexte connu des équations SW. Pour fixer les idées, en 1d, par un jeu de manipulations algébriques, les équations GN en considération [17] peuvent formellement se ramener à (voir [-3-]) :

$$\begin{cases} \partial_t \eta + \partial_x h u & = 0 \\ \partial_t h u + \partial_x (h u^2 + \frac{1}{2} g (\eta^2 - 2 \eta z)) & = -g \eta \partial_x + \mathfrak{D}(\eta, u), \end{cases} \quad (8)$$

où  $\mathfrak{D}(\eta, u)$  est un terme contenant les corrections dispersives. Cette structure permet donc d'interpréter le problème comme celui de l'inclusion d'un terme source dans les équations SW *pre balanced*. Il en résulte un héritage naturel de toutes les propriétés de l'approche dG précédente (notamment la préservation des équilibres statiques et la robustesse). La difficulté se concentre ainsi sur l'introduction du terme dispersif  $\mathfrak{D}(\eta, u)$ , qui induit l'apparition de nouveaux obstacles

numériques. L'évaluation de son équivalent discret  $\mathfrak{D}_h$  implique une décomposition sur la base polynômiale d'approximation utilisée pour le traitement de la partie hyperbolique. Plus précisément, la restriction de  $\mathfrak{D}_h$  à un élément du maillage  $K$  s'écrit :

$$\mathfrak{D}_{h|K}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{N_d} \mathfrak{D}_i^K \theta_i^K(\mathbf{x}), \quad (9)$$

où  $\{\theta_i^K\}_{i=1\dots N_d}$  désigne la base polynômiale locale attachée à l'élément  $K$ . Le point crucial concerne donc le calcul de coefficients  $\mathfrak{D}_i^K$ , pour lequel une méthode colocalisée a été mise en place, couplée à une approche type LDG [8] pour la gestion des dérivées d'ordre élevé. En outre, il a fallu mettre en oeuvre un protocole pour gérer le déferlement des vagues, ou encore les phénomènes d'instabilité intrinsèques méthodes nodales (*aliasing*). Ces travaux ont fait l'objet du papier [-3-]. Devant la qualité des résultats obtenus, une extension sur maillages triangulaires a été mise en oeuvre (code **WaveBox** et publication associée [-8-]).

**Validation et impact :** Bien que très récents et à ce jour diffusés dans le cas 1d uniquement, ces travaux font déjà figure de référence au sein de la communauté. La version 2d sur maillages triangulaires **WaveBox**, désormais opérationnelle, représente à ce jour le seul solveur existant dédié aux équations dispersives fortement non linéaires sur maillages non structurés. Plusieurs autres approches basées sur ce formalisme sont en train de se développer [27] (voir aussi [25]).



## Référents

Les personnes suivantes pourront être consultées à propos de mes activités de recherche au cours de mon doctorat :

- **Christophe BERTHON**, Professeur des Universités.  
*Laboratoire de Mathématiques Jean Leray, Université de Nantes.*  
 – Mail : christophe.berthon@univ-nantes.fr  
 – Tel : 33 (0)2 51 12 59 20

Collaborateur
- **Jean Luc GUERMOND**, Professeur des Universités.  
*Texas A & M University, College Station, TX 77843-3368, USA.*  
 – Mail : guermond@math.tamu.fr

Rapporteur de thèse
- **Fabien MARCHE**, Maître de Conférences.  
*Université Montpellier II.*  
 – Mail : fabien.marche@math.univ-montp2.fr  
 – Tel : 33 (0)4 67 14 45 21

Directeur de thèse
- **Antoine ROUSSEAU**, Directeur de recherche INRIA.  
*Equipe INRIA LEMON Montpellier.*  
 – Mail : antoine.rousseau@inria.fr  
 – Tel : 33 (0)4 67 14 97 88

Collaborateur (LEMON)
- **Nicolas SEGUIN**, Maître de Conférences.  
*Laboratoire J.-L. Lions, UPMC, Paris.*  
 – Mail : nicolas.seguin@upmc.fr  
 – Tel : 33 (0)1 44 27 37 72

Rapporteur de thèse

**Description :** Les modèles stratifiés sont très largement utilisés pour décrire la plupart des mécanismes océanographiques, car ils permettent de capturer les variations du profil de densité verticale. C’est sur la base d’un modèle Shallow Water multicouches qu’a été développée la plateforme de prévision opérationnelle du SHOM :

$$\begin{cases} \partial_t h_i & + \operatorname{div}(h_i \mathbf{u}_i) & = 0 \\ \partial_t(h_i \mathbf{u}_i) & + \operatorname{div}(h_i \mathbf{u}_i \otimes \mathbf{u}_i) & = -h_i \nabla \Phi_i \end{cases} \quad (10)$$

Dans le système d’équations précédent,  $h_i$  désigne la hauteur d’eau dans chaque couche  $i$ ,  $\mathbf{u}_i$  la vitesse et  $\Phi_i$  le potentiel scalaire. Les énergies potentielle et cinétique attachées au système sont définies par  $\partial_{\zeta_i} \mathcal{E} = \Phi_i$  et  $\mathcal{K}_i = \frac{1}{2} \zeta_i \|\mathbf{u}_i\|^2$ , où  $\zeta_i = \rho_i h_i$ ,  $\rho_i$  désignant la densité. La loi de conservation vérifiée par l’énergie totale  $E = \mathcal{E} + \sum_{i=1}^L \mathcal{K}_i$  est la suivante :

$$\partial_t E + \sum_{i=1}^L \operatorname{div} \left( (\rho_i h_i \Phi_i + \mathcal{K}_i) \mathbf{u}_i \right) \leq 0, \quad (11)$$

avec égalité pour les solutions régulières. Deux difficultés structurelles se rajoutent par rapport au modèle Shallow Water classique, à savoir l’apparition de termes non conservatifs et la question du caractère hyperbolique des équations. En second lieu, la majorité des applications correspondent à des régimes à faible nombre de Froude. Ces régimes nécessitent une discrétisation particulière du terme de pression (non conservatif), qui peut compromettre la stabilité des schémas numériques. Un autre enjeu majeur concerne les conditions aux limites. Pour l’heure, seules des méthodes de type *relaxation* sont utilisées pour forcer les profils d’entrée et sortie aux frontières. Ces méthodes sont pour la plupart assez coûteuses, nécessitent la calibration d’un grand nombre de paramètres, et surtout ne parviennent généralement pas à capturer totalement la complexité des phénomènes physiques mis en jeu. A cet effet, des travaux théoriques récents ont été menés, permettant de dégager une méthode générale reposant sur un formalisme mathématiquement robuste [21].

**Objectif :** L’objectif des mes travaux de post-doctorat est de contribuer au développement de schémas numériques dédiés au système (10). Sont principalement visées la décroissance de l’énergie mécanique (équivalent discret de (11)) et la préservation des asymptotiques *bas-Froude* observées dans les contextes applicatifs grand échelle. Dans la lignée de travaux existants [23, 24], et dans la perspective de l’implémentation d’un algorithme dédié à la gestion conditions aux limites, un schéma explicite a été élaboré au cours de la première année de post-doctorat, reposant sur un modèle *régularisé*. La méthode assure la décroissance de l’énergie au niveau discret, et préserve les régimes asymptotiques *bas-Froude* satisfaits au niveau continu. Les premiers résultats numériques sont très prometteurs et l’approche s’avère être compétitive avec les autres codes de calcul de référence actuellement utilisés pour étudier la circulation océanique.

L’analyse théorique a depuis été étendue aux maillages décalés, et un cadre continu unifiant ces différentes approches est en cours de réalisation. Le formalisme couvre ainsi plusieurs déclinaisons de schémas entropiques type *bas-Froude* et ouvre d’importantes perspectives opérationnelles.

L’approche proposée par R. Monjarret [21] a été implémentée afin de gérer les conditions aux limites ouvertes, sur le schéma explicite. Elle est aujourd’hui en cours de validation.

**Démarche scientifique :** Pour mieux appréhender le formalisme, il convient de rappeler la stratégie employée dans l’approche semi-implicite, qui peut être vue comme une version discrète du modèle *régularisé* suivant :

$$\begin{cases} \partial_t h_i & + \operatorname{div}(h_i \mathbf{u}_i^*) & = 0 \\ \partial_t(h_i \mathbf{u}_i) & + \operatorname{div}(h_i \mathbf{u}_i \otimes \mathbf{u}_i^*) & = -h_i \nabla \Phi_i \end{cases} \quad (12)$$

où  $\mathbf{u}_i^* = (\mathbf{u}_i - \delta\mathbf{u}_i)$  et  $\delta\mathbf{u}_i$  représente une perturbation générique sur la vitesse. Cette modification se répercute sur la loi de conservation énergétique (11) de la façon suivante :

$$\partial_t E + \sum_{i=1}^L \text{div} \left( (\rho_i h_i \Phi_i + \mathcal{K}_i) \mathbf{u}_i^* \right) \leq - \sum_{i=1}^L \rho_i \delta\mathbf{u}_i \cdot \nabla \Phi_i ,$$

ce qui justifie formellement une calibration de  $\delta\mathbf{u}_i$  en terme de gradient du potentiel :

$$\delta\mathbf{u}_i = \gamma \nabla \Phi_i , \quad \gamma > 0 .$$

pour assurer une décroissance stricte de l'énergie. Au niveau discret, si l'approche semi-implicite permet de récupérer un équivalent de ce résultat, l'explicitation du schéma génère une quantité de termes qui viennent perturber le bilan d'énergie. L'introduction de termes de diffusion dans les flux numériques ne suffisant pas à les contrôler, il est nécessaire de considérer un terme correctif additionnel au niveau du gradient de pression :

$$\Phi_i \longleftarrow \Phi_i^* = \Phi_i - \alpha \nabla \cdot (h_i \mathbf{u}_i) , \quad \alpha > 0 .$$

La particularité de l'approche proposée réside aussi dans son interprétation au niveau continu, dans la mesure où ce terme correctif vient modifier convenablement le cadre physique en régularisant le bilan d'énergie totale. Il en résulte une condition de stabilité reliant les constantes  $\alpha$ ,  $\gamma$  et la  $CFL$ . Cette analyse a été aussi menée sur le linéarisé, à l'ordre 1 et pour un schéma MUSCL, et donne des résultats très proches de l'expérimentation numérique dans des régimes linéaires. Pour le schéma du premier ordre ces lois de dépendance sont illustrées dans Fig. 2.

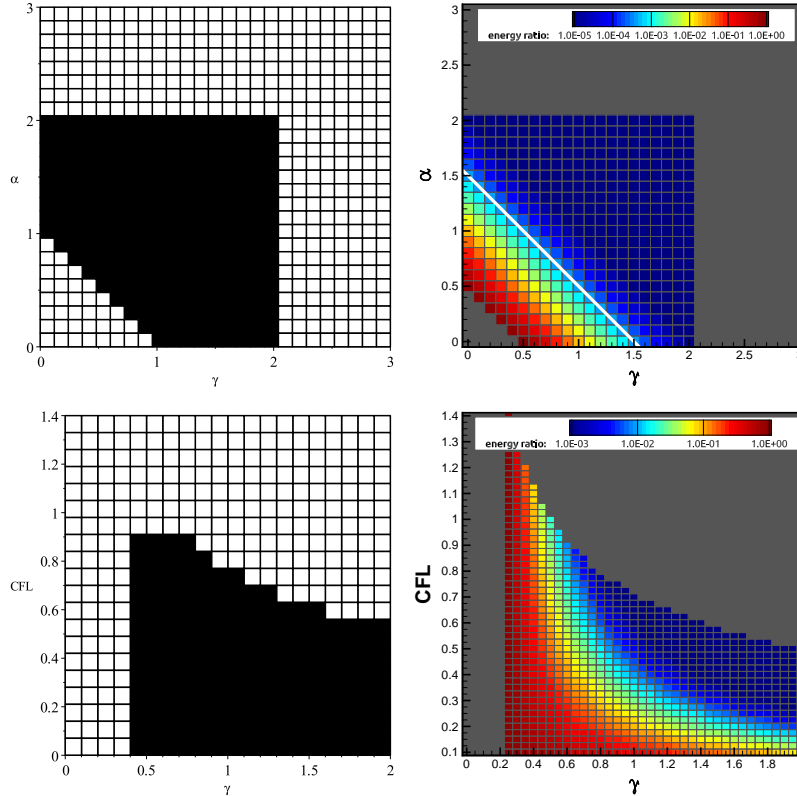


FIGURE 2 – Cartographies de stabilité en  $(\gamma, \alpha)$  (*haut*) et  $(\gamma, CFL)$  (*bas*) à l'ordre 1. Analyse linéaire (gauche) : stabilité dans les zones noires - Taux de dissipation d'énergie numérique (droite) : stabilité dans les zones colorées.

Précisons enfin que travailler dans ce contexte permet, en outre, d'aborder l'analyse asymptotique de manière relativement simple, en s'exonérant d'une analyse totalement discrète. C'est ainsi qu'ont été établis les résultats de consistance avec les régimes *bas-Froude* en temps court et temps long (voir [7] pour les aspects théoriques).

Le code HYCOM a été développé sur mailles décalées. L'une des autres difficultés est d'exporter cette technologie sur ce type de discrétisations, dans le principal but d'y implémenter l'algorithme développé pour la gestion des conditions aux limites. En particulier, à la lumière des résultats établis dans le cadre monocouche [14, 13], des efforts supplémentaires ont été fournis pour démontrer le caractère entropique des schémas semi-implicite et explicite dans cet environnement. Dans le prolongement du contexte colocalisé, l'analyse est valide en 2d pour des maillages généraux et un nombre de couches arbitraire.

**Validation et impact :** A terme les technologies développées ont pour objectif d'intégrer la plateforme de calcul du SHOM (HYCOM) pour des applications civiles et militaires. Il s'agit d'aboutir au premier modèle de simulation océanographique capable de gérer les conditions aux limites ouvertes dans un cadre physique et mathématique rigoureux. L'enjeu est crucial car aucun des modèles actuels ne bénéficie d'une telle assise théorique pour calibrer les conditions d'entrée et sortie dans les domaines de calcul. Ces aspects sont pourtant fondamentaux pour garantir la précision des simulation prévisionnelles.

---

## Référents

Les personnes suivantes pourront être consultées à propos de mes activités de recherche au cours de mon post-doctorat :

• **Rémy BARAILLE**, Ingénieur.

**Interlocuteur SHOM**

*INSA Toulouse.*

- Mail : vila@insa-toulouse.fr
- Tel : (+33) 05 61 55 93 25

• **Frédéric COUDERC**, Ingénieur de Recherche CNRS.

**Collaborateur**

*INSA Toulouse.*

- Mail : frederic.courderc@insa-toulouse.fr
- Tel : (+33) 05 61 55 93 31

• **Jean-Paul VILA**, Professeur des Universités.

**Collaborateur**

*INSA Toulouse.*

- Mail : vila@insa-toulouse.fr
- Tel : (+33) 05 61 55 93 25

## 3 - Perspectives

De manière générale, je désire naturellement poursuivre dans des thèmes liés au Calcul Scientifique et à l'Analyse Numérique. Concernant les sujets étudiés à l'heure actuelle, il y a une grande quantité de pistes à explorer : problèmes de conditions aux limites, couplage de modèles (traitement du déferlement), traitement des chocs, problèmes multi-échelles et multiphasiques, inclusion des termes sources, optimisation du temps de calcul... Cette liste est non exhaustive et n'inclut pas les spécificités inhérentes à l'immense éventail d'applications de ces types de modèles, ou encore liées aux méthodes numériques utilisées. Notons aussi les sujets de modélisation ouverts, notamment sur les systèmes dispersifs, qui constituent des pistes de recherche de premier plan.

Je bénéficie aujourd'hui d'une bonne implantation dans la communauté océanographique, et espère pouvoir valoriser ces importantes perspectives de collaboration dans le cadre de mon intégration à l'équipe. Enfin, dans une volonté d'ouverture et de diversification de mes activités, je suis pleinement disposé à m'investir dans de nouveaux projets liés à mon domaine de compétences.

J'évoque ici les principaux objectifs visés à l'issue de mes travaux, ainsi que mes perspectives d'intégration aux thématiques représentées au département de Mathématiques de l'Université Lyon 1.

### 3.1 *Le code WaveBox* [Continuité Doctorat]

Le développement du code canalise une grande quantité de problématiques, à la fois d'ordre théorique et numérique, qui constituent la plupart des axes visés à l'issue de mes travaux de doctorat.

#### Développement et diffusion - (*court terme*)

Il s'agit d'exporter le code actuel en C++, améliorer sa lisibilité et travailler à sa documentation afin de le rendre accessible à la communauté. Ce travail est en cours.

#### Déferlement - (*court terme*)

Bien que les équations de Green-Naghdi fournissent une très bonne description des vagues avant le déferlement, elles ne sont pas totalement satisfaisantes pour simuler les écoulements à proximité des côtes, de par leur inaptitude à décrire convenablement le phénomène de déferlement. Pour contourner cette limitation, le protocole suivi dans les codes dispersifs **GN-DG1D** et **WaveBox** repose sur une stratégie de "*switching*", qui consiste à passer des équations GN aux équations SW au voisinage des zones de déferlement (voir aussi [6, 29]). En effet, les équations SW fournissent une bonne description du mécanisme, les vagues déferlantes pouvant être vues comme des chocs. Naturellement, ceci nécessite l'introduction d'un outil permettant de détecter avec précision les zones incriminées. Dans nos travaux, nous avons opté pour un critère purement numérique, basé sur le détecteur de chocs introduit par Krivodonova *et al* [15] (Fig. 3 et Fig. 4).

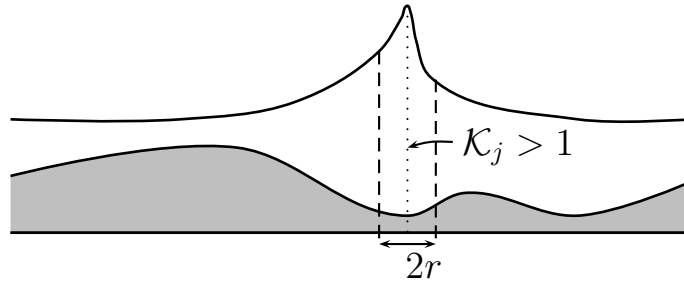


FIGURE 3 – Définition d’une zone de déferlement - choc détecté au niveau de la cellule  $j$  ( $\mathcal{K}_j > 1$ ) : les équations Shallow Water sont utilisées sur une bande de largeur  $2r$ , centrée sur la maille  $j$ .

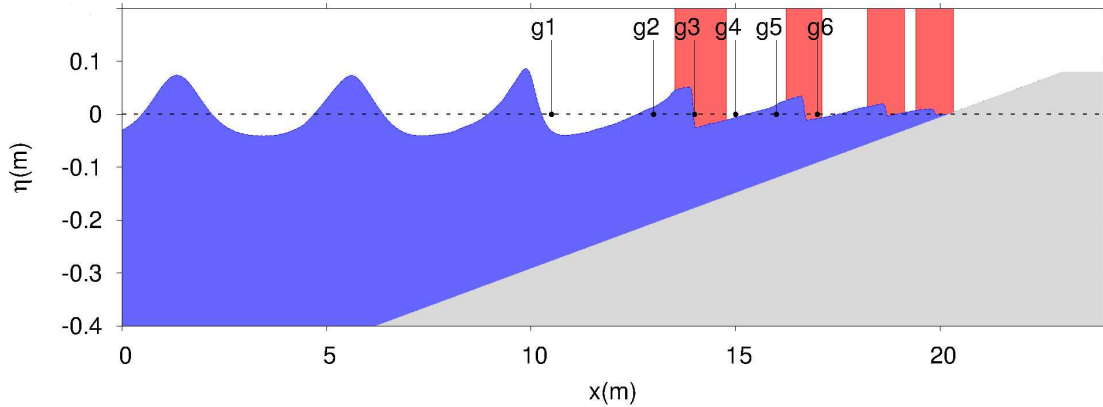


FIGURE 4 – **GN-DG1D** : Cas test de Cox [9] : déferlement sur une plage à pente constante. Illustration de la stratégie de "switching" pour gérer le déferlement. Les équations Shallow Water sont utilisées dans les bandes colorées.

Bien que la méthode se révèle efficace dans la plupart des contextes, elle reste encore relativement sensible à la calibration de certains paramètres, et la qualité des approximations a tendance à se détériorer avec la montée en ordre au niveau des zones de transition de modèles. Nous sommes en présence d’un problème de couplage relativement complexe. L’objectif serait, dans un premier temps, d’améliorer la méthode en y intégrant des critères physiques directement basés sur une quantification de la dissipation de l’énergie et le régime d’écoulement, comme c’est le cas dans le schéma hybride Volumes Finis / Différences Finies proposé dans [29].

### Déferlement (*long terme*)

En second lieu, il convient d’évoquer l’approche très récente proposée par Sergey Gavriluyk *et al* [11], permettant de traiter le déferlement de manière continue. Il s’agit d’un modèle bi-fluide impliquant une couche supérieure avec énergie turbulente et un écoulement inférieur potentiel décrit par les équations GN. Ces enjeux de modélisation et simulation numérique sont d’un intérêt majeur : il s’agit de tendre vers des approches pour lesquelles le phénomène de déferlement est directement contenu dans la physique du modèle. A ce titre, ce travail pourrait apporter de considérables gains de précision et permettre, à terme, de s’affranchir des diverses astuces numériques utilisées jusqu’à présent. Ces travaux théoriques sont actuellement poursuivis par **Sergey Gavriluyk** et **Gael Richard**, et vont appeler de grands besoins numériques, sur lesquels je formule le souhait de me positionner.

### Discrétisation des termes dispersifs (*court terme*)

La discrétisation dG du modèle Green-Naghdi 2d proposé dans [17] est un problème toujours à l'étude. La principale difficulté rencontrée dans le développement du code **WaveBox** réside dans la formulation des opérateurs différentiels d'ordre 2, via des méthodes de pénalisation LDG (*Local Discontinuous Galerkin*) [8]. Dans ce formalisme, si la plupart des termes peuvent être évalués via la matrice de masse ou de rigidité, d'autres font intervenir des termes d'échange entre les cellules, et admettent à ce titre une formulation globale. La taille des matrices correspondantes peut donc rapidement atteindre des dimensions très importantes. Bien que creuses et à ossature diagonale, leur structure n'est pas nécessairement adaptée à une résolution numérique rapide (voir Fig. 5) :

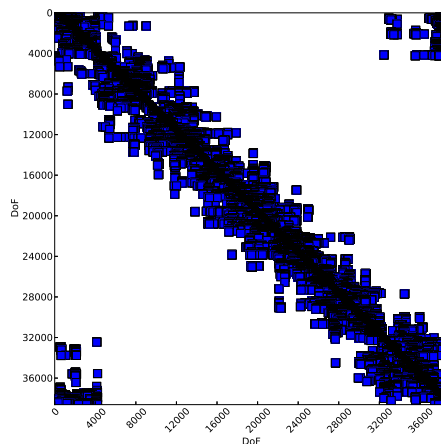


FIGURE 5 – Structure de l'opérateur différentiel  $\mathbb{P}_2$  pour un maillage à 6400 éléments.

Le travail de construction et de stockage (sparse) des opérateurs différentiels s'avère donc être une tâche assez complexe. Si les premières méthodes proposées rendent le code parfaitement opérationnel, il conviendrait de procéder à une comparaison exhaustive des différentes approches possibles, balayer les solveurs linéaires à disposition, et explorer les algorithmes de renumérotation afin d'optimiser le stockage. Ce travail pourrait apporter des améliorations considérables en terme de précision et temps de calcul.

---

### Discrétisation des termes dispersifs (*long terme*)

Sur un plan théorique enfin, il semble envisageable de trouver une formulation faible appropriée de ces opérateurs afin de faciliter leur mise en oeuvre numérique. Des travaux sont actuellement conduits dans cette direction.

---

### Conditions aux limites (*long terme*)

Comme dans la plupart des codes de calcul destinés aux modèles océanographiques, les conditions aux frontières sont gérées par des méthodes de relaxation. Cette technique fait intervenir un domaine de calcul étendu dans lequel on transite progressivement d'une solution imposée à la frontière vers la solution numérique générée par le code. Si ces approches permettent de gérer convenablement la plupart des conditions aux limites classiques, comme la génération des vagues ou leur absorption en sortie de domaine par exemple, elles trouvent rapidement leurs limites dans l'étude d'écoulements de nature plus complexe. De surcroît, la calibration des fonctions de relaxation utilisées est fortement dépendante du problème, et il est difficile de dégager un cadre de travail unifié. Il est clair qu'une analyse mathématique fine du problème permettrait de dégager



certaines pistes sur la question d’une implémentation propre des conditions aux bords dans notre approche dG. Ceci fait partie des thématiques actuellement explorées à l’INSA, notamment autour de Florent Chazel et Pascal Noble, pour l’heure sur des modèles dispersifs type KdV.

## ■ 3.2 Collaboration avec le SHOM ■ [Continuité Post-Doctorat]

### Schéma explicite (*court terme*)

L’un des avantages majeurs de la version semi-implicite du schéma *bas-Froude* [24] tient dans ses conditions de stabilité, qui ne sont pas assujetties à la vitesse des ondes de gravité. Cette caractéristique classique prend toute son importance dans les contextes océanographiques grande échelle, où les régimes sont généralement à très faible nombre de Froude. Naturellement, le prix à payer est le coût du solveur itératif nécessaire au traitement de la partie implicite (équation de continuité), et son impact difficilement contrôlable sur les conditions aux limites.

Naturellement, la version explicite du schéma [-9-] assure la décroissance de l’énergie au niveau discret sous un critère de stabilité gouverné par la célérité des ondes gravitaires. Un important travail de codage et de simulation est actuellement planifié afin de quantifier les éventuels avantages de cette variante, tant au niveau du coût calculatoire que de la qualité des solutions numériques.

Mais le plus important travail relatif au schéma explicite concerne la mise en place des conditions aux limites ouvertes. L’objectif est de valider la méthode dans le cadre colocalisé, pour ensuite passer à son implémentation sur la version *grilles décalées* du schéma. Cette version n’a pas encore été développée et les travaux sont en cours. La finalité de ce travail est l’intégration de cette technologie à la plateforme de simulation océanographique du SHOM.

### Analyse sur mailles décalées (*moyen terme*)

Au cours du post-doctorat, les schémas numériques existants destinés au SW multicouches [24, -9-] ont été reformulés sur ce type de discrétisations dans le cadre de la collaboration avec le SHOM. Si le caractère entropique des approches a pu être établi, d’autres points d’ordre théorique restent à ce jour à clarifier.

D’une part, bien que la consistance ait été établie dans le cas MAC, des efforts supplémentaires sont nécessaires sur d’autres types de discrétisations plus générales (Crouzeix - Raviart et Rannacher - Turek). Les difficultés se concentrent essentiellement sur l’équation de la quantité de mouvement dans le modèle multicouches. En particulier, la discrétisation du terme de gradient de pression, qui ne peut se mettre sous forme conservative dans le cas général, doit faire l’objet d’un travail supplémentaire. En second lieu, l’analyse asymptotique *bas Froude* doit être finalisée.

### Modèle augmenté (*long terme*)

La vorticité  $\omega = \partial_x v - \partial_y u$  tient une place centrale dans la description des phénomènes étudiés en océanographie. Au niveau continu, cette quantité vérifie l’équation de transport suivante :

$$\partial_t(hq) + \text{div}(hq\mathbf{u}),$$

où  $q = \frac{\omega}{h}$ . L’objectif de ce travail réside dans l’intégration de cette quantité dans nos modèles. Sur la base de (12), le système multicouches *régularisé augmenté* s’écrit maintenant :

$$\begin{aligned} \partial_t h_i + \text{div}(h_i(\mathbf{u}_i - \delta\mathbf{u}_i)) &= 0 \\ \partial_t(h_i\mathbf{u}_i) + \text{div}(h_i\mathbf{u}_i \otimes (\mathbf{u}_i - \delta\mathbf{u}_i)) + h_i\nabla\Phi_i &= 0 \\ \partial_t(h_iq_i) + \text{div}(h_iq_i(\mathbf{u}_i - \delta\mathbf{u}_i)) &= 0 \end{aligned} \tag{13}$$

Une analyse basique montre que l'énergie  $\mathcal{W}_i = \frac{1}{2}h_i q_i^2$  associée à la vorticité est transportée à la même vitesse que les énergies potentielle et cinétique, et s'intègre naturellement au bilan d'énergie des équations régularisées :

$$\partial_t E_a + \sum_{i=1}^L \operatorname{div} \left( (\rho_i h_i \Phi_i + \mathcal{K}_i + \mathcal{W}_i) (\mathbf{u}_i - \delta \mathbf{u}_i) \right) \leq - \sum_{i=1}^L \rho_i \delta \mathbf{u}_i \cdot \nabla \Phi_i,$$

où l'énergie totale du modèle augmenté est donnée par  $E_a := E + \sum_{i=1}^L \mathcal{W}_i = \mathcal{E} + \mathcal{K} + \sum_{i=1}^L \mathcal{W}_i$ . Ainsi, sur la base de nos schémas entropiques *bas-Froude*, une version *augmentée* vient d'être proposée. L'analyse du schéma aboutit à un résultat de stabilité sous une condition CFL semblable à celle requise dans les versions d'origine (semi-implicite et explicite). Des investigations numériques doivent à présent être conduites pour exhiber les bénéfices apportés par la considération de cette variable additionnelle dans le modèle.   terme, cette version pourrait constituer une base solide pour le traitement de la force de Coriolis. L'inclusion de ce terme est fondamentale dans les contextes applicatifs que nous explorons et sa discrétisation a une influence capitale sur la stabilité des schémas.



## 4 - Publications



---

### *Manuscrit de thèse*

---

- [-1-] **A. Duran.** Numerical simulation of depth-averaged flow models : a class of Finite Volume and discontinuous Galerkin approaches. *Université Montpellier II*, Octobre 2014.

---

### *Publications dans des revues à comité de lecture*

---

- [-2-] **A. Duran, F. Marche, R. Turpault, C. Berthon.** Asymptotic Preserving Scheme for the Shallow Water equations with source terms on unstructured meshes. *J. Comput. Phys.*, 287 :184–206, 2015.
- [-3-] **A. Duran, F. Marche.** Discontinuous Galerkin discretization of a new class of Green-Naghdi equations. *Commun. Comput. Phys.*, 17(3) :721–760, 2015.
- [-4-] **A. Duran.** A robust and Well Balanced scheme for the 2D Saint-Venant system with friction source term on unstructured meshes. *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, 78(2) :89–121, 2015.
- [-5-] **A. Duran, F. Marche.** Recent advances on the discontinuous Galerkin method for shallow water equations with topography source terms. *Comput. & Fluids*, 101 :88–104, 2014.
- [-6-] **A. Duran, F. Marche, Q. Liang.** On the well-balanced numerical discretization of shallow water equations on unstructured meshes. *J. Comput. Phys.*, 235 :565–586, 2013.

---

### *Proceeding dans une conférence internationale*

---

- [-7-] **A. Duran, F. Marche, C. Berthon, R. Turpault.** Numerical discretizations for shallow water equations with source terms on unstructured meshes. *AIMS on Applied Mathematics. Hyperbolic Problems : Theory, Numerics, Applications. Proceedings of the 14<sup>th</sup> International Conference on Hyperbolic Problems, Padova, June 25-29, 2012*, 8 :541–550, 2014.

---

### *Soumis à la publication*

---

- [-8-] **A. Duran, F. Marche.** A well balanced and positive-preserving discontinuous Galerkin scheme for a new class of Green-Naghdi equations on triangular meshes.
- [-9-] **F. Couderc, A. Duran, J.P. Vila.** Low-Froude Explicit centred scheme for the multilayer shallow water system.

## 5 - Développement

### 5.1 Code *SW-FV2D*

**Descriptif :** *SW-FV2D* est un code basé sur un schéma *Volumes Finis* pour les équations Shallow Water 2d avec termes source.

**Langage :** FORTRAN.

**Contribution :** 100 %

**Caractéristiques :**

- Maillages non structurés (géométries Cell-Centred et Vertex-Centred).
- Préservation des états d'équilibre au repos.
- Préservation de la positivité de la hauteur d'eau.
- Gestion des fronts secs.
- Gestion des termes de friction.
- Extensions MUSCL : ordre 2 (formel) en espace.

**Articles associés :** Ce code a donné lieu aux publications [-6-] et [-4-].

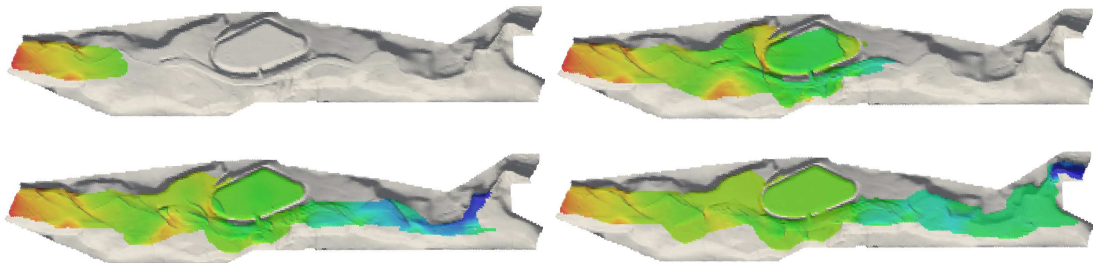


FIGURE 6 – *SW-FV2D* : Simulation de rupture de barrage dans la Vallée du Toce (Alpes du Nord - Italie).

### 5.2 Code *SW-DG2D*

**Descriptif :** *SW-DG2D* est un code de calcul pour le système Shallow Water 2d. Il repose sur une méthode Eléments Finis type *Galerkin discontinu*.

**Langage :** FORTRAN.

**Contribution :** 100 %

**Caractéristiques :**

- Maillages triangulaires.
- Ordre de précision arbitraire en espace.
- Préservation des états d'équilibre au repos à tout ordre.
- Préservation de la positivité de la hauteur d'eau à tout ordre.

- Gestion des chocs.

**Article associé :** Ces travaux sont disponibles dans [-5-].

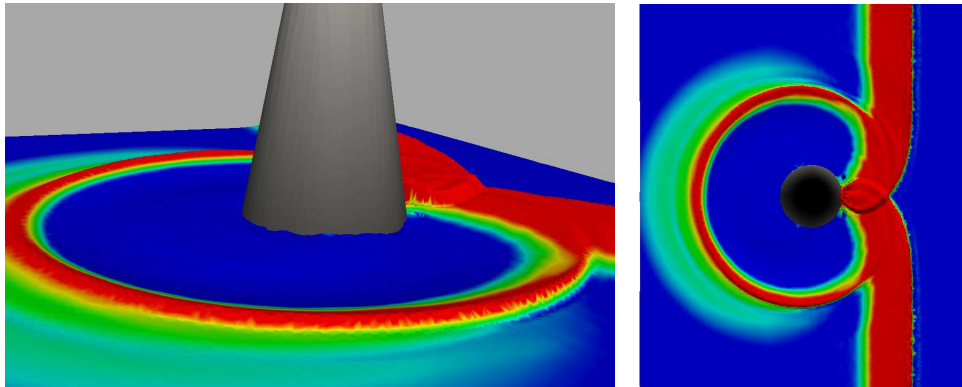


FIGURE 7 – **SW-DG2D** : Simulation de tsunami sur une île conique.

---

### 5.3 Code *GN-DG1D*

---

**Descriptif :** Il s'agit d'un code de calcul basé sur une approche *Galerkin discontinu*, destiné aux équations Green - Naghdi 1d.

**Langage :** FORTRAN.

**Contribution :** 100 %

**Caractéristiques :**

- Ordre de précision arbitraire en espace.
- Préservation des états d'équilibre au repos à tout ordre.
- Préservation de la positivité de la hauteur d'eau à tout ordre.
- Méthode LDG (*Local Discontinuous Galerkin*) pour les dérivées d'ordre élevé.
- Gestion du déferlement.
- Gestion de plusieurs modèles (Shallow Water, Bonneton *et al* ([6]), Lannes *et al* ([17])).

**Article associé :** Ces travaux ont été publiés dans [-3-].

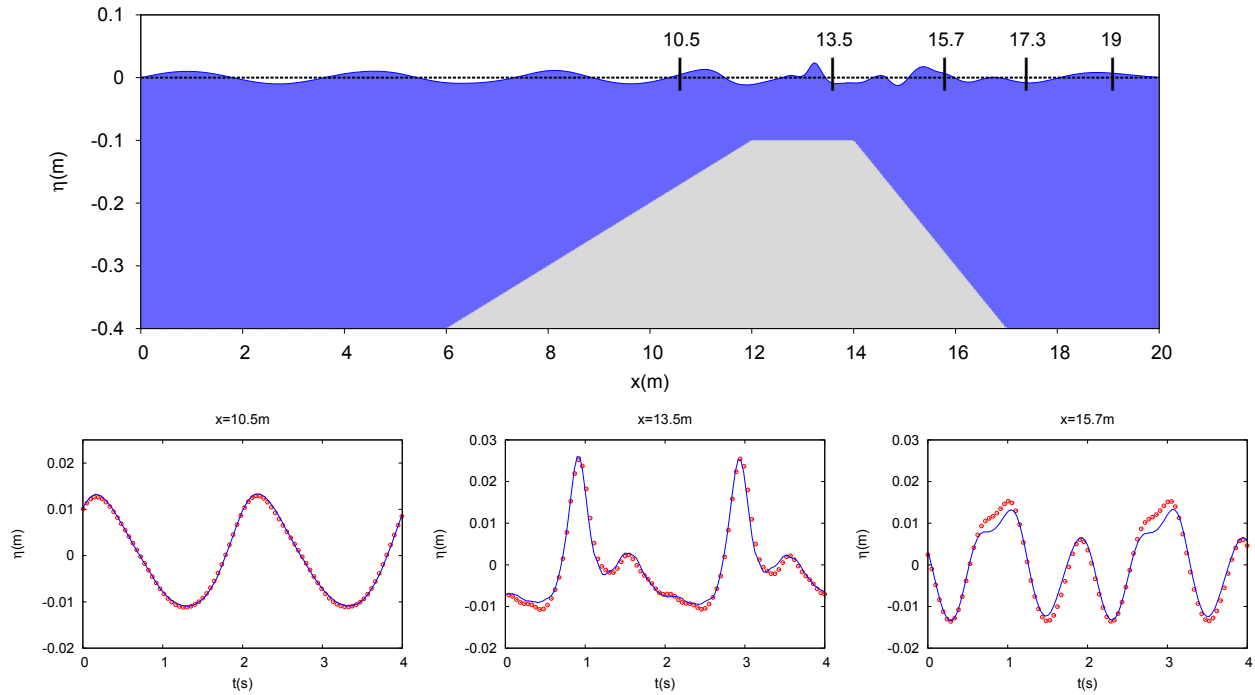


FIGURE 8 – **GN-DG1D** : Cas test de Dingemans [10] : Propagation d’ondes périodiques fortement non linéaires en présence de topographie. Schéma de l’expérience (*haut*) et comparaison avec la solution expérimentale aux trois premières sondes (*bas*).

## 5.4 WaveBox

**Descriptif** : Extension du code précédent aux maillages triangulaires. Code développé en collaboration avec Fabien Marche. Il s’agit à ce jour du premier solveur 2d pour les équations dispersives fortement non linéaires sur maillages triangulaires.

**Langage** : FORTRAN.

C++ (en cours).

**Contribution** : Majeure (>50 %)

### Caractéristiques :

- Ordre de précision arbitraire en espace.
- Préservation des états d’équilibre au repos à tout ordre.
- Préservation de la positivité de la hauteur d’eau à tout ordre.
- Méthode LDG (*Local Discontinuous Galerkin*) pour les dérivées d’ordre élevé.
- Gestion du déferlement.
- Gestion de plusieurs modèles (Shallow Water, Bonneton *et al* ([6]), Lannes *et al* ([17])).

**Article associé** : Ces travaux sont soumis à la publication [-9-].

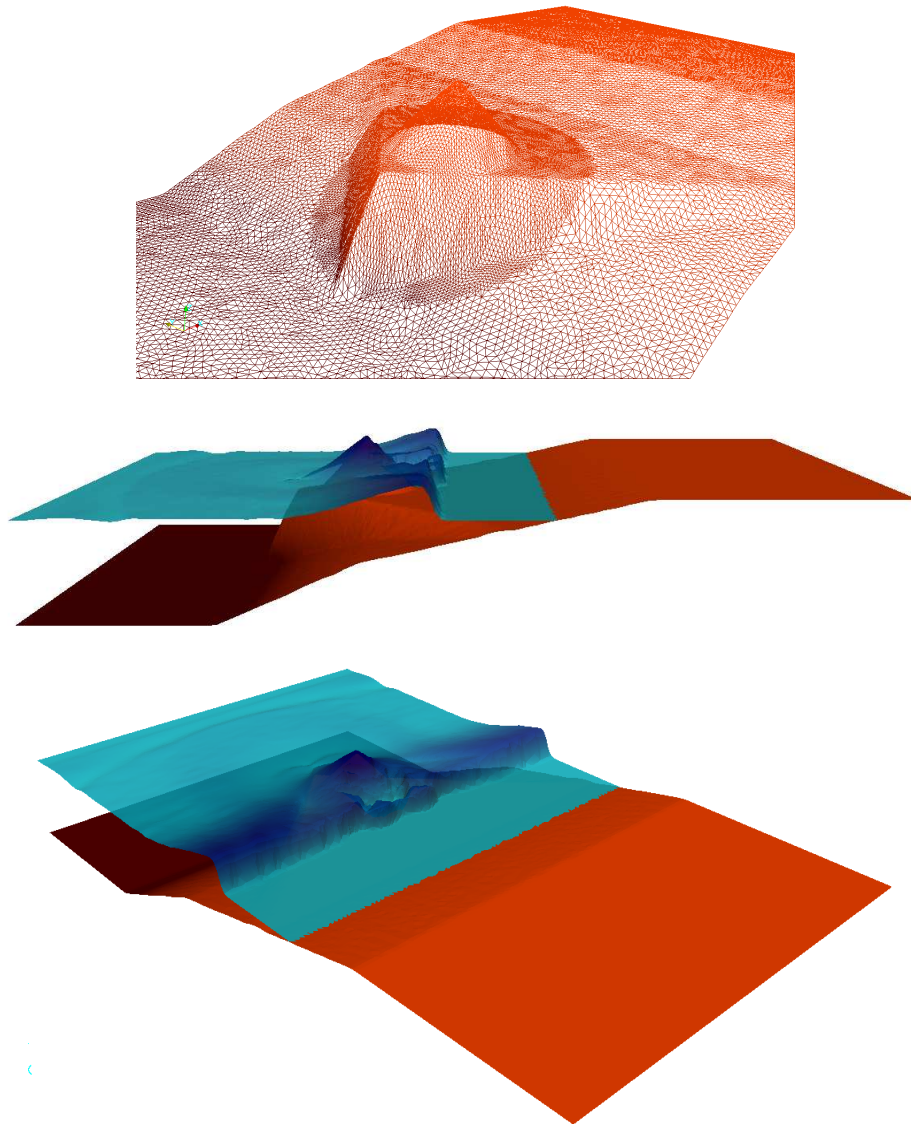


FIGURE 9 – **WaveBox** : Propagation d’une vague sur un récif 3d : Maillage, topographie et aperçu 3d de l’écoulement après la submersion. Le maillage est raffiné dans la partie centrale.

### 5.5 Autres développements

**Descriptif** : Extension “*Asymptotic Preserving*” du schéma *Volumes Finis Hydrostatic Upwind* proposé par Christophe Berthon et Françoise Foucher [5], destiné à l’approximation des solutions faibles du système Shallow Water 2d avec friction et topographie variable. Travail en collaboration avec Christophe Berthon et Rodolphe Turpault.

**Langage** : FORTRAN.

**Contribution** : 100 %

**Caractéristiques :**

- Maillages non structurés (géométries Cell-Centred et Vertex-Centred).
- Préservation des états d’équilibre au repos.
- Préservation de la positivité de la hauteur d’eau.
- Gestion des termes de friction : stabilité au voisinage des fronts secs, et propriété type

*“Asymptotic Preserving”*.

- Reconstruction MUSCL : ordre 2 (formel) en espace.

**Article associé :** Ce code a fait l’objet de la publication [-2-].

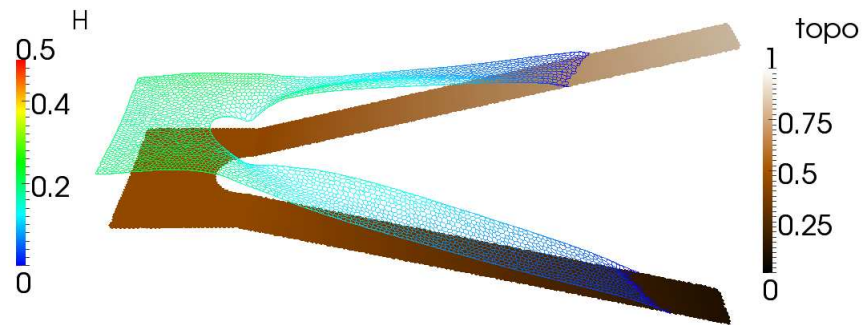


FIGURE 10 – Evolution de fronts secs soumis à une loi de friction quadratique dans un bassin à double pente.



## Bibliographie

- [1] A. Bermudez and M.-E. Vazquez. Upwind methods for hyperbolic conservation laws with source terms. *Comput. & Fluids*, 23 :1049–1071, 1994.
- [2] C. Berthon. Robustness of MUSCL schemes for 2D unstructured meshes. *J. Comput. Phys.*, 218 :495–509, 2006.
- [3] C. Berthon, R. Turpault. Asymptotic preserving HLL schemes. *Numer. Methods Partial Differ. Equ.*, 27 :1396–1422, 2011.
- [4] C. Berthon, F. Marche, R. Turpault. An efficient scheme on wet/dry transitions for shallow water equations with friction. *Comput. & Fluids*, 48 :192–201, 2011.
- [5] C. Berthon, F. Foucher. Efficient well balanced hydrostatic upwind schemes for shallow water equations. *J. Comput. Phys.*, 231 :4993–5015, 2012.
- [6] P. Bonneton, F. Chazel, D. Lannes, F. Marche, M. Tissier. A splitting approach for the fully nonlinear and weakly dispersive Green - Naghdi model. *J. Comput. Phys.*, 230 :1479–1498, 2011.
- [7] D. Bresch, R. Klein, C. Lucas Multiscale Analyses for the Shallow Water Equations. *Computational Science and High Performance Computing IV - Notes on Numerical Fluid Mechanics and Multidisciplinary Design*, 115 :149–164, 2011.
- [8] B. Cockburn and C.-W. Shu. The Local Discontinuous Galerkin method for time-dependent convection-diffusion systems. *SIAM J. Numer. Anal.*, 141 :2440–2463, 1998.
- [9] D.T. Cox. Experimental and numerical modelling of surf zone hydrodynamics. *Univ. of Delaware, Newark*, 1995.
- [10] M.W. DINGEMANS. Comparison of computations with Boussinesq-like models and laboratory measurements. *Delft. Hydr.*, Report H-1684.12, 32, 1994.
- [11] S. L. Gavriluk and V. Yu. Liapidevskii and A. A. Chesnokov. Spilling breakers : applications to Favre waves and to the shoaling and the breaking of the solitary wave. *Submitted*, 2016.
- [12] E. Godlewski and P.-A. Raviart. Viscous euler equations of the Euler equations and entropy principles *SIAM J. App. Math.*, 74(2) :28–305, 2014.
- [13] R. Herbin and W. Kheriji and J.-C. Latché. On some implicit and semi-implicit staggered schemes for the shallow water and euler equations. *M2AN*, 48 :1807–1857, 2014.
- [14] R. Herbin and J.-C. Latché and T.T. Nguyen. Explicit staggered schemes for the compressible euler equations. *ESAIM Proceedings*, 40 :83–102, 2013.
- [15] L. Krivodonova and J. Xin and J.-F. Remacle and N. Chevaugéon and J.E. Flaherty. Shock detection and limiting with discontinuous Galerkin methods for hyperbolic conservation laws. *App. Num. Math.*, 48 :323–338, 2004.
- [16] A. Kurganov, D. Levy. Central-upwind schemes for the saint-venant system. *Math. Mod. Num. Anal.*, 36 :397–425, 2002.
- [17] D. Lannes, F. Marche. A new class of fully nonlinear and weakly dispersive Green-Naghdi models for efficient 2D simulations. *J. Comput. Phys.*, 282 :238–268, 2015.
- [18] Q. Liang and A.G.L. Borthwick. Adaptive quadtree simulation of shallow flows with wet-dry fronts over complex topography. *Comput. & Fluids*, 38 :221–234, 2009.
- [19] Q. Liang and F. Marche. Numerical resolution of well-balanced shallow water equations with complex source terms. *Adv. Water Res.*, 32 :873–884, 2009.
- [20] J. Hou and Q. Liang and F. Simons and R. Hinkelmann. A stable 2D unstructured shallow flow model for simulations of wetting and drying over rough terrains. *Comput. & Fluids*, 82 :132–147, 2013.

- [21] R. Monjarret. The multi-layer shallow water model with free surface. Numerical treatment of the open boundaries. *Thèse de doctorat, Université de Toulouse*, 2014.
- [22] J. Hou and Q. Liang and F. Simons and R. Hinkelmann. A positivity preserving and well-balanced DG scheme using finite volume subcells in almost dry regions. *Applied Mathematics and Computation*, 272 :259–273, 2016.
- [23] M. Parisot and J.P. Vila. Numerical scheme for multilayer shallow-water model in the low-Froude number regime. *C. R. Acad. Sci. Paris , Ser.I*, 352 :953–957, 2014.
- [24] M. Parisot and J.P. Vila. Centered-potential regularization for advection upstream splitting method. *In press*, 2016.
- [25] S. Popinet. A quadtree-adaptive multigrid solver for the Serre-Green-Naghdi equations. *J. Comp. Phys.*, 302 :336–358, 2015.
- [26] B. Rogers and M. Fujihara and A. Borthwick. Adaptive Q-tree Godunov-type scheme for shallow water equations. *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, 35 :247–280, 2001.
- [27] A.G. Filippini and M. Kazolea and M. Ricchiuto. A flexible genuinely nonlinear approach for nonlinear wave propagation, breaking and run-up. *J. Comp. Phys.*, 310 :381–417, 2016.
- [28] G. Russo. Central schemes for conservation laws with application to shallow water equations. in Trends and applications of mathematics to mechanics *STAMM2002, S. Rionero and G. Romano (Editors), Springer-Verlag Italia SRL*, 225–46, 2005.
- [29] M. Tissier and P. Bonneton and F. Marche and F. Chazel and D. Lannes. A new approach to handle wave breaking in fully non-linear Boussinesq models. *Coast. Engrg.*, 67 :54–66, 2012.
- [30] Y. Xing, C.-W. Shu. High order finite difference WENO schemes with the exact conservation property for the shallow water equations. *J. Comput. Phys.*, 208 :206–227, 2005.
- [31] X. Zhang, C.-W. Shu. On maximum-principle-satisfying high order schemes for scalar conservation laws. *J. Comput. Phys.*, 229(9) :3091 – 3120, 2010.
- [32] X. Zhang, Y. Xia, C.-W. Shu. Maximum-principle-satisfying and positivity-preserving high order discontinuous Galerkin schemes for conservation laws on triangular meshes. *J. Sci. Comp.*, 50 :29–62, 2012.
- [33] J.G. Zhou, D.M. Causon, and C. G. Mingham. The surface gradient method for the treatment of source terms in the shallow-water equations. *J. Comput. Phys.*, 168 :1–25, 2001.