

# ACTIVITES DE RECHERCHE

**Arnaud DURAN**

Né le 11 juin 1984

Doctorat obtenu le 17 Octobre 2014

Qualification CNU 26 obtenue le 4 Février 2015

*Adresse professionnelle :* INSA Toulouse, 135 Avenue de Rangueil,  
31400 Toulouse

*Adresse personnelle :* 29 rue Pradal, Résidence George V,  
31400 Toulouse

*Contact :* Téléphone bureau : (+33) 5 62 80 99 19  
Téléphone portable : (+33) 6 77 95 80 44  
Mail : [arnaud.duran@insa-toulouse.fr](mailto:arnaud.duran@insa-toulouse.fr)  
Site Web : [www.math.univ-toulouse.fr/~aduran](http://www.math.univ-toulouse.fr/~aduran)

---

## Table des matières

<b>1</b>	<b>Présentation générale</b>	<b>3</b>
1.1	Enseignement . . . . .	3
1.2	Recherche . . . . .	3
<b>2</b>	<b>Activités de recherche : doctorat</b>	<b>5</b>
2.1	Traitement des variations du fond : équations “pre-balanced” . . . . .	5
2.1.1	Contribution et objectifs . . . . .	5
2.1.2	Développement . . . . .	7
2.2	Traitement des termes de friction . . . . .	8
2.2.1	Contribution et objectifs . . . . .	8
2.2.2	Développement . . . . .	9
2.3	Application aux équations de Green - Naghdi . . . . .	10
2.3.1	Contribution et objectifs . . . . .	10
2.3.2	Développement . . . . .	11
<b>3</b>	<b>Activités de recherche : post-doctorat et perspectives</b>	<b>13</b>
3.1	Schéma Bas-Froude explicite . . . . .	13
3.2	Perspectives . . . . .	15
3.2.1	Post-doctorat . . . . .	15
3.2.2	A plus long terme . . . . .	15
<b>4</b>	<b>Travaux et publications</b>	<b>16</b>

# Fiche de synthèse

## Situation actuelle

Post-Doctorant à L'Institut National des Sciences Appliquées (INSA) de Toulouse.

## Thématiques

- Analyse, modélisation et simulation d'écoulements à surface libre.
- Shallow Water, Shallow Water multicouches, Equations dispersives.
- Méthodes Volumes Finis, Différences Finies et Galerkin Discontinu.
- Stabilité non linéaire.
- Schémas numériques 1d et 2d sur grilles cartésiennes, non structurées et maillage décalé.
- Schémas "Well-Balanced", termes source, friction.
- Schémas bas-Froude / bas-Mach, schémas "Asymptotic Preserving".
- Conditions aux limites.

## Enseignement

- Vacations à l'INSA Toulouse : Travaux Pratiques d'Analyse Numérique.  
Volume horaire total : 54h. *Sept. 2015*
- Allocataire-Moniteur à Polytech' Montpellier (Université Montpellier II).  
Volume horaire total : 192h sur 3 ans. *Sept. 2011 - Sept. 2014*
- Professeur de Mathématiques.
  - Lycée Déodat de Séverac, Céret (66). *Sept. 2007 - Sept. 2008*
  - Collège Henri Barbusse, Saint-Denis (93). *Sept. 2008 - Sept. 2009*

## Formation et diplômes

- **Doctorat** en Mathématiques Appliquées de l'Université Montpellier II.  
Thèse encadrée par Fabien MARCHE et Pascal AZERAD.
- Master 2 Mathématiques obtenu à l'Université Montpellier II.
- **Agrégation externe** et CAPES de Mathématiques, obtenus respectivement en 2011 et 2007.

## Participations

- Membre du groupe de travail **MathOcéan**.
- Membre de l'équipe **INRIA LEMON**.
  
- 2 exposés dans des conférences internationales.
- 3 exposés dans des conférences nationales.
- 5 exposés dans des séminaires et 3 présentations dans des groupes de travail.

## Publications

- 2 articles parus dans *Journal of Computational Physics*.
- 1 article paru dans *Communication in Computational Physics*.
- 1 article paru dans *Computers & Fluids*.
- 1 article paru dans *International Journal for Numerical Methods in Fluids*.
- 1 proceeding paru dans *AIMS on Applied Mathematics. Hyperbolic Problems : Theory, Numerics, Applications*.

# 1 Présentation générale

Après avoir officié deux années en tant que professeur certifié de Mathématiques, j'ai sollicité en 2009 deux années de disponibilité afin de suivre un parcours de Master de Mathématiques à l'Université Montpellier II et me préparer simultanément au concours de l'Agrégation. A l'issue de l'année scolaire 2010 - 2011, l'admission au concours et l'obtention d'un financement doctoral m'ont permis de poursuivre mon cursus universitaire, tout en gardant contact avec l'enseignement grâce aux missions de monitorat.

Ma thèse, intitulée "*Simulation numérique d'écoulements type "depth averaged" : une classe de schémas Volumes Finis et Galerkin Discontinu*" a débuté en octobre 2011, au sein de l'Institut de Mathématiques et Modélisation de Montpellier (I3M), et a été encadrée par Fabien MARCHE. La soutenance a eu lieu le 17 octobre 2014.

Depuis octobre 2014, je suis post-doctorant à l'INSA de Toulouse. Je travaille au sein de l'équipe de Jean-Paul Vila et Pascal Noble, en collaboration avec le Service Hydrographique et Océanographique de la Marine (SHOM).

## 1.1 Enseignement

Mon expérience dans l'enseignement a débuté durant l'année scolaire 2007 - 2008. Suite à mon admission au CAPES de Mathématiques, j'ai effectué mon stage de validation pratique IUFM dans le lycée Déodat de Séverac à Céret (66). J'avais en charge une classe de seconde. Durant cette année, j'ai aussi donné quelques heures de cours en collège (une dizaine de séances en classe de 3ème).

J'ai été affecté l'année suivante dans l'Académie de Créteil, au collège Henri Barbusse à Saint - Denis (93). J'ai eu en charge deux classes de 4ème, deux classes de 5ème, ainsi qu'une classe de 3ème pour des cours de soutien, à raison d'une heure par semaine.

Allocataire-moniteur durant ma thèse, j'ai enseigné à l'école d'ingénieurs Polytech' Montpellier. Durant trois années, j'ai donné des cours d'Algèbre et d'Analyse aux étudiants de première année, pour un volume horaire de 64 heures par an.

Depuis septembre 2015, j'interviens dans le parcours de 3ème année IMACS (Ingénierie des Matériaux, Composants et Systèmes) à l'INSA de Toulouse, à travers l'encadrement de travaux pratiques d'Analyse Numérique au premier semestre. Le volume horaire total pour les deux groupes pris en charge est de 54 heures.

## 1.2 Recherche

Les principaux aspects de mes travaux de recherche sont liés au développement et l'analyse de méthodes numériques pour la simulation d'écoulements à surface libre. Au cours de ma thèse, je me suis essentiellement intéressé aux équations type Shallow Water et Green - Naghdi. L'étude de méthodes Volumes Finis (FV) et Galerkin Discontinu (dG) a été privilégiée, dans des contextes 1d et 2d sur maillages non structurés. Cette thématique à l'interface avec d'autres disciplines telles que l'informatique et la mécanique des fluides constituait un virage assez sérieux par rapport à mon profil à coloration plus théorique. Durant ces trois années de travail, j'ai pu explorer une partie d'un domaine qui m'était alors peu familier, et ceci m'a véritablement donné goût à la recherche.

Les difficultés inhérentes à la construction de tels schémas numériques sont multiples, et de

nature très diverses. Les équations Shallow Water formant un système de loi de conservation hyperbolique non linéaire, l'un des principaux enjeux repose sur la mise en place de certains critères de stabilité non linéaire :

- Préservation des états d'équilibre (*Well - Balancing*).
- Préservation de l'ensemble convexe des états admissibles (*Robustesse*) (*i.e.* préservation de la positivité de la hauteur d'eau).
- Inégalités d'entropie discrètes.

L'objectif majeur réside dans la construction de schémas capables de satisfaire au mieux ces critères. A l'issue de ces travaux, quatre codes de calcul ont été développés :

- [SW-FV2D](#) : Schéma Volumes Finis pour les équations Shallow Water 2d sur maillages non structurés [-6-], avec inclusion des termes de friction [-2-].
- [SW-AP2D](#) : Schéma VF type "Asymptotic Preserving" pour les équations Shallow Water 2d avec friction sur topographie variable [-4-].
- [SW-DG2D](#) : Application des méthodes dG aux équations Shallow Water *pre balanced* [-6-] sur maillages triangulaires [-5-].
- [GN-DG1D](#) : Schéma dG 1d pour une famille d'équations Green - Naghdi [-3-].

L'extension du code précédent au cas 2d sur maillages triangulaires est actuellement réalisée ([GN-DG2D](#)) et fait l'objet d'un papier en cours d'écriture ([-8-]).

Les schémas ci-dessus ont été codés en langage FORTRAN. Ce travail m'a permis d'augmenter considérablement mes capacités en matière de programmation et d'améliorer mes connaissances sur les méthodes numériques utilisées. Au delà de la consolidation de mon profil scientifique dans les domaines de l'Analyse Numérique et du Calcul Scientifique, ces trois années de travail sur cette thématique m'ont ouvert à d'autres disciplines, notamment à des concepts fondamentaux en mécanique des fluides et en physique.

Aujourd'hui, les thèmes abordés au cours du post - doctorat me permettent de continuer d'entretenir cette pluridisciplinarité. D'un point de vue général, mon travail porte sur le développement de méthodes numériques pour des modèles d'écoulements stratifiés en océanographie, et s'articule autour des points suivants :

- Construction et analyse de schémas numériques pour le système Shallow Water multicouches 2d.
- Implémentation et simulation numérique avec traitement des conditions aux limites.

Ces travaux sont effectués dans le cadre d'une collaboration avec le SHOM (Service Hydrographique et Océanographique de la Marine).

## 2 Activités de recherche : doctorat

### Introduction

Mes travaux de thèse ont débuté le 1<sup>er</sup> septembre 2011 au sein de l’Institut de Mathématiques et Modélisation de Montpellier (I3M), sous la direction de Fabien Marche. D’un point de vue général, mon sujet d’étude concerne l’analyse, la modélisation et la simulation d’écoulements à surface libre. En particulier, ces travaux ont abouti à la mise en place de schémas numériques pour les systèmes de Saint - Venant et Green - Naghdi. Concernant les méthodes numériques, les Volumes Finis (FV) et Galerkin Discontinu (dG) ont été employées, dans des contextes 1d et 2d sur maillages non structurés.

Les premières étapes de mes recherches furent consacrées aux équations Shallow Water. Jouissant d’une formulation simple et d’un domaine de validité relativement large, ces équations sont très fréquemment utilisées pour étudier la circulation des masses d’eau dans les océans et les rivières, et s’invitent de surcroît dans une multitude d’autres secteurs, avec entre autres, des applications pratiques aux problèmes de transport de polluant ou de sédiments, aux avalanches, ou encore à l’analyse du ruissellement d’eau de pluie. Sous leur forme conservative, ces équations consistent en un système d’EDP couplant la hauteur d’eau  $h$  et le débit  $\mathbf{q} = {}^t(q_x, q_y)$ . Dans un contexte 2d, en notant  $z$  une paramétrisation de la topographie, et  $\mathbf{u} = {}^t(u, v)$  le champ de vitesse, ces équations prennent la forme suivante (voir Fig. 1 pour une illustration 1d) :

$$U_t + \nabla \cdot G(U) = B(U, z), \quad (1)$$

avec

$$U = \begin{pmatrix} h \\ q_x \\ q_y \end{pmatrix}, \quad G(U) = \begin{pmatrix} q_x & q_y \\ uq_x + \frac{1}{2}gh^2 & vq_x \\ uq_y & vq_y + \frac{1}{2}gh^2 \end{pmatrix}, \quad B(U, z) = \begin{pmatrix} 0 \\ -ghz_x \\ -ghz_y \end{pmatrix}. \quad (2)$$

L’ensemble convexe des états admissibles est noté :

$$\Theta := \{(h, \mathbf{q}), h \geq 0, \mathbf{q} \in \mathbb{R}^2\}. \quad (3)$$

Il s’agit d’un système de loi de conservation hyperbolique non linéaire. A ce titre, ce travail a pu s’appuyer sur les orientations générales proposées dans les nombreux articles et ouvrages dédiés à l’analyse et la résolution de cette famille d’équations ([8, 9, 10] par exemple). De manière plus spécifique, dans ce contexte, certaines problématiques cruciales telles que la préservation des états d’équilibre (*Well Balancing*) ou la préservation de la positivité de la hauteur d’eau (propriété aussi appelée *Robustesse* ou  $\Theta$  - *préservation*) doivent faire l’objet d’une attention particulière. Un autre point clé, fortement corréllé à la robustesse, concerne le traitement numérique des zones sèches.

Aujourd’hui, en dépit de l’abondance des travaux consacrés aux équations Shallow Water, vérifier l’ensemble de ces conditions dans un contexte 2d non structuré est loin d’être trivial. Les méthodes numériques développées au cours de cette thèse ont pour principal objectif d’intégrer au mieux ces aspects.

### 2.1 Traitement des variations du fond : équations “pre-balanced”

*Travaux menés en collaboration avec Fabien Marche.*

#### 2.1.1 Contribution et objectifs

Devant la difficulté que représente la préservation de l’ensemble des états d’équilibre, il est d’usage de se placer dans le contexte simplifié dit du “*lac au repos*” :

$$h + z = cte \quad , \quad \mathbf{u} = 0, \quad (4)$$

qui représente déjà un critère de stabilité relativement discriminant. Depuis les travaux de Bermudez et Vazquez [2], de nombreux schémas ont été proposés permettant de préserver cet état d'équilibre particulier (on parle de “*C - propriété*”).

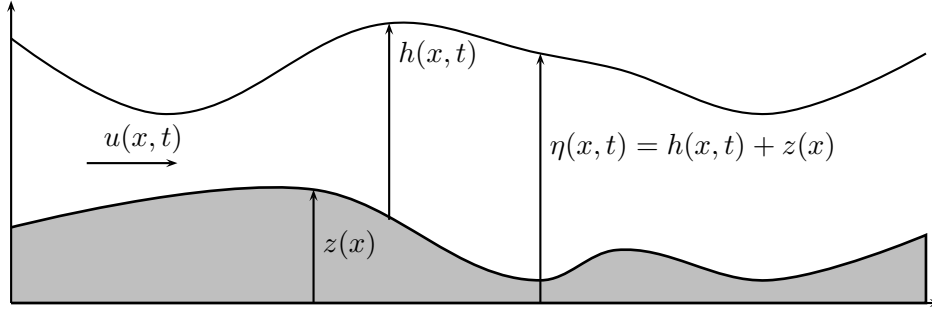


FIGURE 1 – Variables non conservative pour les équations Shallow Water.

Une idée intéressante pour minimiser les efforts dans l’obtention de cette propriété consiste à considérer l’élévation totale de la surface libre  $\eta = h + z$  (Fig. 1) à la place de la hauteur au cours de la construction du schéma numérique. Ces approches trouvent leurs racines dans plusieurs travaux datant du début des années 2000 ([11, 17, 18, 19, 22]). Plus récemment, cette quantité est intégrée directement dans la variable d’écoulement, tout en préservant la structure hyperbolique du système, donnant lieu aux équations “*pre - balanced*” ([13]) :

$$V_t + \nabla \cdot H(V, z) = S(V, z), \quad (5)$$

où

$$V = \begin{pmatrix} \eta \\ q_x \\ q_y \end{pmatrix}, \quad H(V, z) = \begin{pmatrix} q_x \\ uq_x + \frac{1}{2}g(\eta^2 - 2\eta z) \\ uq_y \\ q_y \\ vq_x \\ vq_y + \frac{1}{2}g(\eta^2 - 2\eta z) \end{pmatrix}, \quad (6)$$

et le terme source relatif à la topographie s’écrit :

$$S(V, z) = \begin{pmatrix} 0 \\ -g\eta z_x \\ -g\eta z_y \end{pmatrix}. \quad (7)$$

Ces équations sont équivalentes aux équations primales au sens faible pour des topographies continues.

Partant de cette formulation, l’objectif est de prolonger les travaux Volumes Finis existants en 1d [14] au contexte 2d non structuré. Le schéma Volumes Finis obtenu est décrit dans [-6-] : la *C-propriété* est étendue au cas 2d pour tout solveur consistant via une discrétisation appropriée du terme source, admettant de surcroît une expression simple. Les avantages de la formulation *pre-balanced* se manifestent aussi lors de l’extension MUSCL proposée, qui n’induit pas de terme correctif pour assurer l’équilibre exact entre les termes de bathymétrie et les termes de flux dans des configurations type *lac au repos*. Un autre résultat important concerne la préservation de la hauteur d’eau : grâce à une adaptation de la méthode proposée par Christophe Berthon pour les schémas MUSCL [3], cette propriété est aussi conservée à l’ordre élevé.

La seconde partie de ces travaux est consacrée aux approches type dG. Devant leur popularité croissante, la question de leur application aux équations Shallow Water s’est naturellement posée. Après une revue détaillée des principaux résultats disponibles dans la littérature, il est apparu que la construction d’une approche numérique efficace pour ce système était un problème délicat, de surcroît dans un contexte non structuré. Partant des équations Shallow Water *pre*

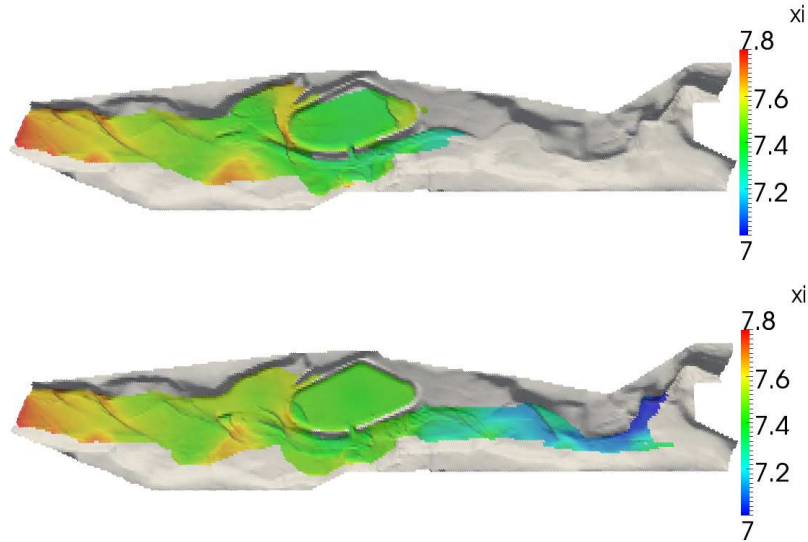


FIGURE 2 – **SW-FV2D** Simulation de rupture de barrage dans la vallée du Toce (Alpes du Nord, Italie).

*balanced*, nous proposons un schéma dG 2d robuste et d'ordre arbitraire, pour lequel la préservation des équilibres statiques est automatique [-5-]. Ce schéma peut ainsi être interprété comme une extension du schéma Volumes Finis précédent. La préservation des états admissibles  $\Theta$  est assurée via un principe du maximum discret, en proposant une extension des idées de [20, 21] au cas *pre balanced*. Notons enfin que d'autres problématiques ont aussi dû faire l'objet d'un travail spécifique, telles que le traitement des chocs et l'implémentation de procédés de limitation.

Ces travaux ont donné lieu au développement de deux codes de calcul Volumes Finis et Galerkin Discontinu, décrits ci-dessous :

### 2.1.2 Développement

#### Code de calcul SW-FV2D

**Descriptif :** SW-FV2D est un code basé sur un schéma *Volumes Finis* pour les équations Shallow Water 2d avec termes source.

#### Caractéristiques :

- Maillage non structuré (géométries Cell-Centred et Vertex-Centred).
- Préservation des états d'équilibre au repos.
- Préservation de la positivité de la hauteur d'eau.
- Gestion des fronts secs.
- Gestion des termes de friction.
- Extensions MUSCL : ordre 2 (formel) en espace.

Ce code a fait l'objet des publications [-6-] et [-2-].

#### Code de calcul SW-DG2D

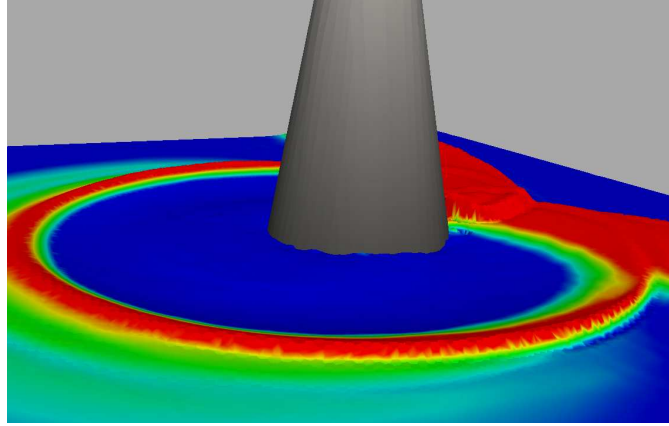


FIGURE 3 – **SW-DG2D** Simulation de tsunami sur une île conique.

**Descriptif :** SW-DG2D est un code de calcul pour le système Shallow Water 2d. Il repose sur une méthode Eléments Finis type *Galerkin discontinu*.

**Caractéristiques :**

- Maillages triangulaires.
- Ordre de précision arbitraire en espace.
- Préservation des états d'équilibre au repos à tout ordre.
- Préservation de la positivité de la hauteur d'eau à tout ordre.
- Gestion des chocs.

Ces travaux sont détaillés dans [-5-].

## 2.2 Traitement des termes de friction

*Travaux menés en collaboration avec Fabien Marche, Rodolphe Turpault et Christophe Berthon.*

### 2.2.1 Contribution et objectifs

Le problème de l'apparition de zones sèches est inévitable dès lors que l'on s'attelle à la simulation de situations réalistes (écoulements dans les rivières, hydrodynamique côtière, ...). La présence de hauteurs d'eaux évanescents menace la stabilité des schémas au voisinage des zones incriminées, et cette menace est d'autant plus prononcée lorsque les phénomènes de friction sont pris en compte. En effet, si l'on considère la loi de Manning, qui est la plus couramment utilisée, les équations (1) se réécrivent avec un nouveau terme source :

$$U_t + \nabla \cdot G(U) = B(U, z) + E(U), \quad (8)$$

où

$$E(U) = - \begin{pmatrix} 0 \\ n^2 \frac{\|\mathbf{q}\|}{h^{10/3}} q_x \\ n^2 \frac{\|\mathbf{q}\|}{h^{10/3}} q_y \end{pmatrix}, \quad (9)$$

et l'on s'expose naturellement au problème des divisions par  $h$ . Anisi, dans le contexte Volumes Finis, le problème délicat de l'inclusion de la friction dans les équations Shallow Water a été sujet à certains développements théoriques et numériques. Il s'agit donc de proposer un schéma



permettant d’assurer des calculs stables au voisinage de zones sèches tout en maintenant un bon niveau de précision. L’objectif visé est la mise en place d’un schéma type “Asymptotic Preserving”, dans la continuité des travaux Volumes Finis 1d menés dans [5]. Le point de départ repose sur une réécriture du terme de friction sous la forme :

$$E(U) = \sigma(h)(R(U) - U), \text{ avec } R(U) = {}^t(h, q_x - \|\mathbf{q}\|q_x, q_y - \|\mathbf{q}\|q_y). \quad (10)$$

Cette formulation rentre ainsi dans le cadre des travaux proposés dans [4]. Les auteurs y développent une méthode pour traiter cette classe générale de termes source, basée sur un solveur HLL modifié. Cette approche permet, dans un premier temps, de discrétiser le terme de friction en s’exonérant du problème des divisions par  $h$ . Il en résulte un schéma présentant un excellent comportement au niveau des frontières sèches.

En second lieu, une calibration appropriée des paramètres intervenant dans le schéma de friction permet de dégénérer au niveau discret vers le régime diffusif non linéaire vérifié par les équations continues :

$$\partial_t h - \nabla \cdot \left( \frac{\sqrt{h}}{\rho(h)\sqrt{\|\nabla\eta\|}} \nabla\eta \right) = 0, \quad (11)$$

où  $g\rho^2(h) = \frac{n^2}{h^{10/3}}$ . L’élaboration d’un schéma jouissant d’une telle propriété représente une nouveauté dans le contexte 2d non structuré. Nous avons pu identifier quelques contextes dans lesquels ce nouveau schéma semble se distinguer des approches classiques. Sans surprise, ces disparités apparaissent assez clairement lorsque l’on s’approche du régime asymptotique. C’est typiquement le cas pour des applications faisant intervenir de faibles hauteur d’eau et où les termes de résistance vont avoir tendance à contrôler l’évolution de l’écoulement. Cette partie est de nature prospective et notons qu’en l’absence de solution exacte dans ce contexte, de cas tests expérimentaux suffisamment discriminants et autres résultats de référence, il est difficile pour l’instant d’évaluer avec plus de précision les bénéfices réels apportés par un telle propriété. Les détails sur la construction du schéma et les résultats numériques peuvent être trouvés dans [-4-]. Soulignons qu’en parallèle, ce travail a pu être en partie étendu à d’autres approches, notamment celle proposée dans [-6-], ce qui a permis d’intégrer le traitement de la friction au schéma Volumes Finis SW-FV2D élaboré au début de ma thèse. Ces aspects sont détaillées dans [-2-].

### 2.2.2 Développement

#### Code de calcul SW-AP2D

**Descriptif :** SW-AP2D est un code basé sur le schéma *Volumes Finis Hydrostatic Upwind* proposé par Christophe Bethon et Françoise Foucher [6], destiné à l’approximation des solutions faibles du système Shallow Water 2d avec friction et topographie variable.

#### Caractéristiques :

- Maillage non structuré (géométries Cell-Centred et Vertex-Centred).
- Préservation des états d’équilibre au repos.
- Préservation de la positivité de la hauteur d’eau.
- Gestion des termes de friction : stabilité au voisinage des fronts secs, et propriété type “Asymptotic Preserving”.
- Reconstruction MUSCL : ordre 2 (formel) en espace.

Ce code a fait l’objet de la publication [-4-].

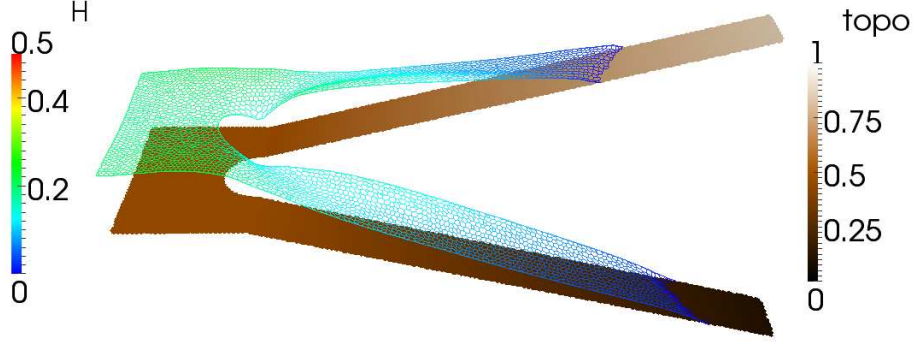


FIGURE 4 – **SW-AP2D** Simulation de rupture de barrage dans un bassin à double pente avec effets de friction type Manning.

## 2.3 Application aux équations de Green - Naghdi

*Travaux menés en collaboration avec Fabien Marche.*

### 2.3.1 Contribution et objectifs

Au cours de la dernière année, mes investigations se sont orientées sur la prise en compte des effets dispersifs. Elles ont abouti au développement d'une approche dG pour un modèle Green-Naghdi récemment introduit par David Lannes et Fabien Marche [12] :

$$\begin{cases} \partial_t \zeta + \partial_x(hu) = 0, \\ [1 + \alpha \mathfrak{T}[h_b]] \left( \partial_t hu + \partial_x(hu^2) + \frac{\alpha - 1}{\alpha} gh \partial_x \zeta \right) + \frac{1}{\alpha} gh \partial_x \zeta \\ \quad + h(\mathcal{Q}_1(u) + g\mathcal{Q}_2(\zeta)) + g\mathcal{Q}_3\left([1 + \alpha \mathfrak{T}[h_b]]^{-1}(gh \partial_x \zeta)\right) = 0, \end{cases} \quad (12)$$

où les opérateurs  $\mathfrak{T}$ ,  $\mathcal{Q}_{i=1,2,3}$  sont définis par :

$$\mathcal{Q}_1(u) = 2h\partial_x h(\partial_x u)^2 + \frac{4}{3}h^2\partial_x u\partial_x^2 u + \left( h\partial_x z(\partial_x u)^2 + h\partial_x^2 z u\partial_x u + (\partial_x \zeta \partial_x^2 z + \frac{h}{2}\partial_x^3 b)u^2 \right), \quad (13a)$$

$$\mathcal{Q}_2(\zeta) = -(\partial_x \zeta \partial_x z + \frac{h}{2}\partial_x^2 z)\partial_x \zeta, \quad (13b)$$

$$\mathcal{Q}_3(w) = \frac{1}{6}\partial_x(h^2 - h_b^2)\partial_x w + \frac{h^2 - h_b^2}{3}\partial_x^2 w - \frac{1}{6}\partial_x^2(h^2 - h_b^2)w, \quad (13c)$$

$$\mathfrak{T}[h]w = -\frac{h^3}{3}\partial_x^2\left(\frac{w}{h}\right) - h^2\partial_x h\partial_x\left(\frac{w}{h}\right). \quad (13d)$$

Dans les équations (12),  $\zeta$  désigne l'élévation de la surface libre par rapport à un niveau de référence  $h_0$ , et  $h_b$  le niveau d'eau au repos. L'une des caractéristiques de cette formulation réside dans l'expression de l'opérateur différentiel  $[1 + \alpha \mathfrak{T}[h_b]]$  agissant sur l'équation de quantité de mouvement, car contrairement aux modèles classiques, celui-ci ne dépend pas du temps. En pratique, ceci offre un gain considérable en terme de temps de calcul, et permet ainsi d'orienter le code vers des résolutions d'ordre élevé.

L'équation de la masse étant la même que dans le contexte Shallow Water, on s'intéresse à l'évolution de la quantité de mouvement, qui peut se réécrire :

$$\partial_t q + \partial_x(hu^2 + \frac{1}{2}g(\eta^2 - 2\eta z)) + \mathfrak{D}(\eta, u) = -g\eta\partial_x z, \quad (14)$$

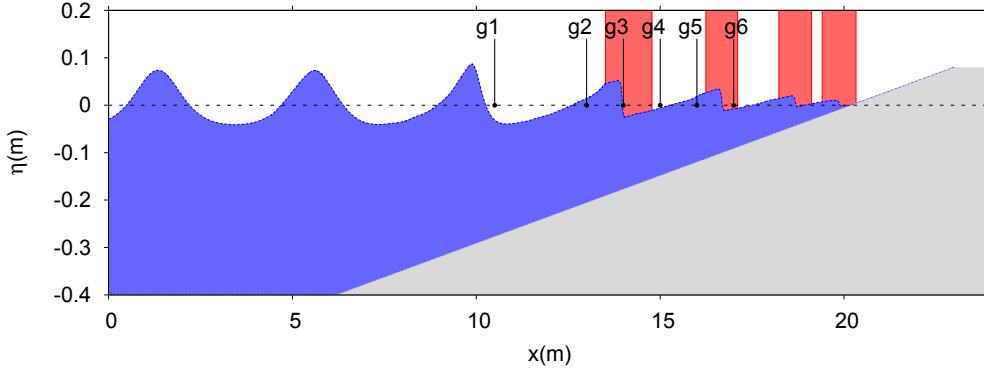


FIGURE 5 – **GN-DG1D** Cas test de Cox : Strategie de “switching” pour la gestion du déferlement : les équations Shallow Water sont utilisées dans les zones délimitées par les bandes colorées.

avec

$$\begin{aligned} \mathfrak{D}(\eta, u) = & [1 + \alpha \mathfrak{T}[h_b]]^{-1} \left( \frac{1}{\alpha} gh \partial_x \eta + h(\mathcal{Q}_1(u) + g \mathcal{Q}_2(\eta)) \right. \\ & \left. + g \mathcal{Q}_3([1 + \alpha \mathfrak{T}[h_b]]^{-1} (gh \partial_x \eta)) \right) - \frac{1}{\alpha} gh \partial_x \eta. \end{aligned} \quad (15)$$

La structure du modèle permet donc d’interpréter le problème comme celui de l’inclusion d’un terme source. Il en résulte un héritage naturel de toutes les propriétés de l’approche dG 2d précédente (notamment la préservation des équilibres statiques et la robustesse). La difficulté se concentre ainsi sur l’introduction des termes dispersifs, qui induit l’apparition de nouveaux obstacles numériques. A cet effet, il a fallu mettre en place une approche pour gérer le déferlement des vagues, ou encore les phénomènes d’instabilité liés à l’aliasing. Enfin, l’évaluation des dérivées d’ordre élevé, pour laquelle des techniques type LDG (Local Discontinuous Galerkin) ont été étudiées. Ces travaux ont fait l’objet du papier [-3-]. Devant la qualité des résultats obtenus, une extension sur maillages triangulaires a été mise en oeuvre et est actuellement opérationnelle [-8-].

### 2.3.2 Développement

#### Code de calcul GN-DG1D

**Descriptif :** Il s’agit d’un code de calcul basé sur une approche *Galerkin discontinu*, destiné aux équations Green - Naghdi 1d.

##### Caractéristiques :

- Ordre de précision arbitraire en espace.
  - Préservation des états d’équilibre au repos à tout ordre.
  - Préservation de la positivité de la hauteur d’eau à tout ordre.
  - Méthode LDG (*Local Discontinuous Galerkin*) pour les dérivées d’ordre élevé.
  - Gestion du déferlement.
  - Gestion de plusieurs modèles (Shallow Water, Bonneton *et al* ([7]), Lannes *et al* ([12])).
- Ces travaux ont été publiés dans [-3-].

#### Code de calcul GN-DG2D

**Descriptif :** Extension récente du code GN-DG1D au contexte 2d sur mailles triangulaires. Fait l’objet d’un article sur le point d’être soumis [-8-].

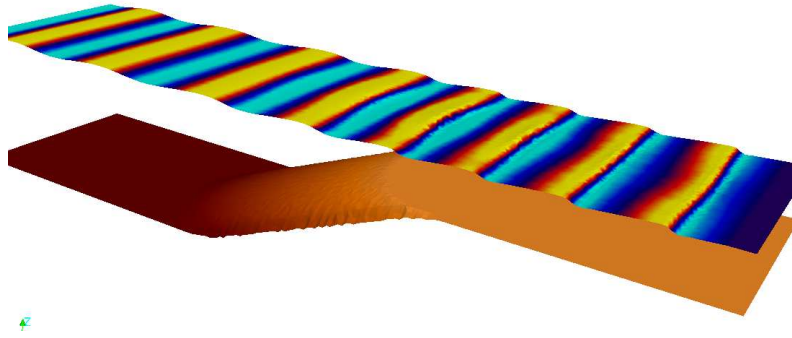


FIGURE 6 – GN-DG2D Train d'ondes solitaires se propageant sur un haut-fond à base circulaire.

### 3 Activités de recherche : post-doctorat et perspectives

#### Introduction

L'objectif des mes travaux de post-doctorat est de contribuer au développement de schémas numériques dédiés au système Shallow Water multicouches. En notant  $L$  le nombre de couches et  $(h_i, \mathbf{u}_i)$  la variable d'écoulement dans chaque couche, le système s'écrit :

$$\begin{aligned}\partial_t h_i + \operatorname{div}(h_i \mathbf{u}_i) &= 0, \\ \partial_t(h_i \mathbf{u}_i) + \operatorname{div}(h_i \mathbf{u}_i \otimes \mathbf{u}_i) &= -h_i \nabla \Phi_i / \varepsilon^2,\end{aligned}\tag{16}$$

où  $\Phi_i$  désigne le potentiel scalaire relatif à la couche  $i$ , et  $\varepsilon$  caractérise le ratio entre les forces inertielles et potentielles. Les énergies potentielle et cinétique sont respectivement données par :

$$\partial_{\rho_i} \mathcal{E} = \Phi_i \quad , \quad \mathcal{K}_i = \frac{1}{2} \rho_i \|\mathbf{u}_i\|^2,\tag{17}$$

où  $\rho_i = \varrho_i h_i$ ,  $\varrho_i$  étant la densité dans la couche  $i$ . L'énergie totale du système  $E = \mathcal{E} / \varepsilon^2 + \sum_{i=1}^L \mathcal{K}_i$  vérifie :

$$\partial_t E + \sum_{i=1}^L \operatorname{div}\left( (\varrho_i h_i \nabla \Phi_i + \mathcal{K}_i) \mathbf{u}_i \right) \leq 0,\tag{18}$$

avec égalité pour les solutions régulières. La majorité des applications en océanographie correspond à des régimes à faible nombre de Froude, c'est à dire  $\varepsilon \ll 1$ . Dans ce contexte les schémas nécessitent une discrétisation particulière des termes de flux et de pression afin de garantir, entre autres, certains critères de stabilité fondamentaux, ou encore la consistance avec les régimes limites atteints dans cette asymptotique. Récemment, un schéma semi-implicite a été proposé pour répondre à cette problématique [16]. L'idée est d'introduire un terme régularisant dans le profil du champ de vitesse lors du traitement des équations de la masse et de la quantité de mouvement. Cette stratégie permet d'assurer la dissipation de l'énergie, et donc la stabilité du schéma, tout en présentant en bon comportement asymptotique. Formellement, au niveau continu, le schéma numérique peut s'interpréter comme l'équivalent discret du modèle régularisé suivant :

$$\begin{aligned}\partial_t h_i + \operatorname{div}(h_i (\mathbf{u}_i + \delta \mathbf{u}_i)) &= 0, \\ \partial_t(h_i \mathbf{u}_i) + \operatorname{div}(h_i \mathbf{u}_i \otimes (\mathbf{u}_i + \delta \mathbf{u}_i)) &= -h_i \nabla \Phi_i / \varepsilon^2.\end{aligned}\tag{19}$$

Ce modèle admet la loi de conservation suivante sur l'énergie :

$$\partial_t E + \sum_{i=1}^L \operatorname{div}\left( (\varrho_i h_i \nabla \Phi_i + \mathcal{K}_i) (\mathbf{u}_i + \delta \mathbf{u}_i) \right) \leq \delta \mathbf{u}_i \cdot \nabla \Phi_i,\tag{20}$$

de sorte qu'un choix approprié du terme régularisant ( $\delta \mathbf{u}_i = -\gamma \nabla p_i$  avec  $\gamma > 0$  par exemple) permet d'assurer la décroissance de l'énergie totale. L'approche numérique proposée permet d'obtenir d'une version discrète de (20).

#### 3.1 Schéma Bas-Froude explicite

*Travaux menés en collaboration avec Jean-Paul Vila.*

A terme, l'un des principaux objectifs est d'intégrer cette technologie à la plateforme de prévision opérationnelle du SHOM, dénommée HYCOM (HYbrid Coordinate Ocean Model). Cette démarche s'articule autour de deux points centraux :

- Mise en place d'une stratégie numérique pour gérer les conditions aux limites ouvertes.
- Exportation des schémas sur mailles décalées.

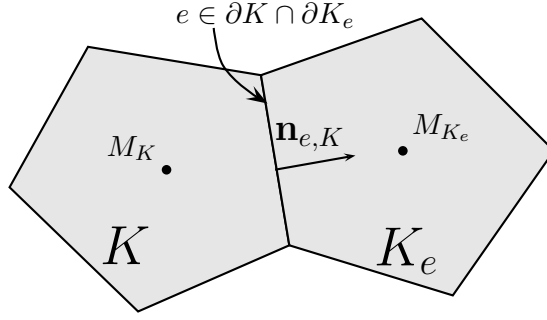


FIGURE 7 – Géométrie et notations au niveau de l'interface  $e \in \partial K \cap \partial K_e$ .

Dans cette perspective, le premier objectif est de proposer une version explicite du schéma numérique [16]. Cette version se destine en particulier à la validation de l'algorithme développé au début du post-doctorat pour la gestion des conditions aux limites, sur la base des travaux menés dans [15]. Naturellement, la contrainte CFL de la version semi-implicite n'est pas assujettie à la célérité des ondes gravitaires, mais la stratégie nécessite l'inversion d'un système linéaire à chaque pas de temps. Ainsi, la version explicite vise aussi à évaluer les éventuels bénéfices apportés par l'une ou l'autre des approches en terme de temps de calcul. Enfin, sur un plan technique, la seconde étape consiste à étendre l'analyse aux mailles décalées, qui sont les types de discrétisations utilisées dans HYCOM. Pour fixer les idées, les lignes suivantes proposent quelques détails sur le schéma proposé.

Considérons un maillage  $\mathbb{T}$  du domaine de calcul  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ . Notons  $m_K$  l'aire et  $m_{\partial K}$  le périmètre d'une cellule  $K \in \mathbb{T}$ . Si l'on note  $\partial K$  la frontière de  $K$ , avec, pour toute arête  $e \in \partial K$ ,  $m_e$  la longueur de l'interface correspondant et  $\mathbf{n}_{e,K}$  la normale sortante (voir Fig. 7), le schéma peut s'écrire :

$$\left\{ \begin{array}{l} h_{K,i}^{n+1} = h_{K,i}^n - \frac{\Delta t}{m_K} \sum_{e \in \partial K} \mathcal{F}_{e,i}^n \cdot \mathbf{n}_{e,K} m_e \\ h_{K,i}^{n+1} \mathbf{u}_{K,i}^{n+1} = h_{K,i}^n \mathbf{u}_{K,i}^n - \frac{\Delta t}{m_K} h_{K,i}^n \sum_{e \in \partial K} \frac{\Phi_{e,i}^{n,*}}{\varepsilon^2} \mathbf{n}_{e,K} m_e \\ \quad - \frac{\Delta t}{m_K} \sum_{e \in \partial K} \left( \mathbf{u}_{K,i}^n (\mathcal{F}_{e,i}^n \cdot \mathbf{n}_{e,K})^+ + \mathbf{u}_{K_e,i}^n (\mathcal{F}_{e,i}^n \cdot \mathbf{n}_{e,K})^- \right) m_e \end{array} \right. \quad (21)$$

avec les potentiels et flux perturbés :

$$\Phi_{e,i}^{n,*} = \frac{\Phi_{K,i}^n + \Phi_{K_e,i}^n}{2} - \Lambda_{e,i}^n, \quad \mathcal{F}_{e,i}^n = \frac{h_{K,i}^n \mathbf{u}_{K,i}^n + h_{K_e,i}^n \mathbf{u}_{K_e,i}^n}{2} - \Pi_{e,i}^n,$$

et la notation  $w^\pm = \frac{w \pm |w|}{2}$  pour toute fonction scalaire  $w$ . Il s'agit d'un schéma centré avec un terme de dissipation  $\frac{\Pi_{e,i}^n}{2}$  intégrant, conformément au cas continu, le gradient du potentiel scalaire (voir 20). La principale différence avec la version semi-implicite réside dans la nécessité d'introduire un second correctif  $\Lambda_{e,i}^n$  sur la partie potentiel, exprimé en termes de perturbation locale du débit. Le travail en cours de rédaction [-9-] détaille la mise en place de conditions sur  $\Lambda_{e,i}^n$  et  $\Pi_{e,i}^n$  permettant de garantir la décroissance de l'énergie totale. La consistance avec les

régimes asymptotiques bas-Froude est aussi établie, sous une condition CFL appropriée. Notons qu'une version décentrée du schéma est aussi disponible.

## 3.2 Perspectives

### 3.2.1 Post-doctorat

Deux axes de recherche principaux sont désormais à poursuivre.

Premièrement, la mise en oeuvre du schéma bas-Froude explicite ouvre la voie d'un important travail de simulation numérique, principalement orienté vers des applications réalistes en océanographie et la validation du traitement des conditions aux limites.

En second lieu, si la stabilité des versions semi-implicite et explicite a été démontrée dans le contexte des mailles décalées, d'autres points fondamentaux tels que la consistance, la robustesse, ou le comportement asymptotique des schémas, restent à investiguer.

Enfin, d'autres points clés tels que la montée en ordre (temporelle et spatiale) ou le comportement vis à vis forces de Coriolis restent à étudier.

### 3.2.2 A plus long terme

Sur un plan général, je désire naturellement poursuivre dans des thèmes liés au Calcul Scientifique et l'Analyse Numérique. Concernant mon sujet de recherche, il y a une grande quantité de pistes à explorer : problèmes de conditions aux limites, couplage, traitement du déferlement, inclusion des termes sources, ou encore optimisation du temps de calcul. A cet égard, ces problématiques sont toutes largement présentes dans les travaux menés actuellement à l'INSA de Toulouse, et suscitent un grand intérêt, en particulier au sein de la communauté océanographique. Cette liste est bien sûr non exhaustive et n'inclut pas les spécificités intrinsèques à chaque cadre applicatif, ou encore liées aux méthodes numériques utilisées. Notons aussi les sujets de modélisation, qui constituent d'immenses perspectives de recherche, et dans lesquels je pourrais mettre à profit mon expérience numérique. De manière plus spécifique, devant l'efficacité des méthodes dG et l'intérêt croissant qu'elles suscitent, je souhaiterais poursuivre mon exploration du domaine en travaillant sur d'autres classes d'EDP. Désireux de diversifier mes activités de recherche et mettre à profit mes connaissances universitaires, je suis pleinement disposé à m'investir dans un projet à caractère plus théorique relié à cette thématique.

## 4 Travaux et publications

### Manuscrit de thèse

- [-1-] **A. Duran.** Numerical simulation of depth-averaged flow models : a class of Finite Volume and discontinuous Galerkin approaches. *Université Montpellier II*, Octobre 2014.

### Publications

- [-2-] **A. Duran.** A robust and Well Balanced scheme for the 2D Saint-Venant system with friction source term on unstructured meshes. *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, 78 :89-121, 2015.
- [-3-] **A. Duran, F. Marche.** Discontinuous Galerkin discretization of a new class of Green-Naghdi equations. *Commun. Comput. Phys.*, 17(3) :721–760, 2015.
- [-4-] **A. Duran, F. Marche, R. Turpault, C. Berthon.** Asymptotic Preserving Scheme for the Shallow Water equations with source terms on unstructured meshes. *J. Comput. Phys.*, 287 :184–206, 2015.
- [-5-] **A. Duran, F. Marche.** Recent advances on the discontinuous Galerkin method for shallow water equations with topography source terms. *Comput. & Fluids*, 101 :88–104, 2014.
- [-6-] **A. Duran, F. Marche, Q. Liang.** On the well-balanced numerical discretization of shallow water equations on unstructured meshes. *J. Comput. Phys.*, 235 :565–586, 2013.

### Proceeding dans une conférence internationale

- [-7-] **A. Duran, F. Marche, C. Berthon, R. Turpault.** Numerical discretizations for shallow water equations with source terms on unstructured meshes. *AIMS on Applied Mathematics. Hyperbolic Problems : Theory, Numerics, Applications. Proceedings of the 14<sup>th</sup> International Conference on Hyperbolic Problems, Padova, June 25-29, 2012*, 8 :541–550, 2014.

### En préparation

- [-8-] **A. Duran, F. Marche.** A well balanced and positive -preserving discontinuous Galerkin scheme for a new class of Green-Naghdi equations on triangular meshes.
- [-9-] **F. Couderc, A. Duran, J.P. Vila.** Explicit Low Froude scheme for the Multilayer Shallow Water system.



## Bibliographie

- [1] E. Audusse, M.O. Bristeau. A well-balanced positivity preserving "second-order" scheme for shallow water flows on unstructured meshes. *J. Comput. Phys.*, 206 :311–333, 2005.
- [2] A. Bermudez and M.-E. Vazquez. Upwind methods for hyperbolic conservation laws with source terms. *Comput. & Fluids*, 23 :1049–1071, 1994.
- [3] C. Berthon. Robustness of MUSCL schemes for 2D unstructured meshes. *J. Comput. Phys.*, 218 :495–509, 2006.
- [4] C. Berthon, R. Turpault. Asymptotic preserving HLL schemes. *Numer. Methods Partial Differ. Equ.*, 27 :1396–1422, 2011.
- [5] C. Berthon, F. Marche, R. Turpault. An efficient scheme on wet/dry transitions for shallow water equations with friction. *Comput. & Fluids*, 48 :192–201, 2011.
- [6] C. Berthon, F. Foucher. Efficient well balanced hydrostatic upwind schemes for shallow water equations. *J. Comput. Phys.*, 231 :4993–5015, 2012.
- [7] P. Bonneton, F. Chazel, D. Lannes, F. Marche, M. Tissier. A splitting approach for the fully nonlinear and weakly dispersive Green - Naghdi model. *J. Comput. Phys.*, 230 :1479–1498, 2011.
- [8] F. Bouchut. Nonlinear stability of finite volume methods for hyperbolic conservation laws, and well-balanced schemes for sources. *Frontiers in Mathematics*, Birkhauser, Basel, 2004.
- [9] E. Godlewski and P.-A. Raviart. Numerical approximation of hyperbolic systems of conservation laws. *Applied Mathematical Sciences*, vol.118, Springer-Verlag, 1996.
- [10] R.J. Leveque. Finite-Volume Methods for Hyperbolic Problems. *Cambridge Texts in Applied Mathematics*, 2002.
- [11] A. Kurganov, D. Levy. Central-upwind schemes for the saint-venant system. *Math. Mod. Num. Anal.*, 36 :397–425, 2002.
- [12] D.Lannes, F.Marche. A new class of fully nonlinear and weakly dispersive Green–Naghdi models for efficient 2D simulations. *J. Comput. Phys.*, 282 :238–268, 2015.
- [13] Q. Liang and A.G.L. Borthwick. Adaptive quadtree simulation of shallow flows with wet–dry fronts over complex topography. *Comput. & Fluids*, 38 :221–234, 2009.
- [14] Q. Liang and F. Marche. Numerical resolution of well-balanced shallow water equations with complex source terms. *Adv. Water Res.*, 32 :873–884, 2009.
- [15] R. Montjarret. The multi-layer shallow water model with free surface. Numerical treatment of the open boundaries. *Thèse de doctorat, Université de Toulouse*, 2014.
- [16] M. Parisot, J.P. Vila. Numerical scheme for multilayer shallow-water model in the low-Froude number regime. *C. R. Acad. Sci. Paris ,Ser.I*, 352 :953–957, 2014.
- [17] B. Rogers, M. Fujihara, A. Borthwick. Adaptive Q-tree Godunov-type scheme for shallow water equations. *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, 35 :247–280, 2001.
- [18] G. Russo. Central schemes for conservation laws with application to shallow water equations. in Trends and applications of mathematics to mechanics *STAMM2002, S. Rionero and G. Romano (Editors), Springer-Verlag Italia SRL*, 225–46, 2005.
- [19] Y. Xing, C.-W. Shu. High order finite difference WENO schemes with the exact conservation property for the shallow water equations. *J. Comput. Phys.*, 208 :206–227, 2005.
- [20] X. Zhang, C.-W. Shu. On maximum-principle-satisfying high order schemes for scalar conservation laws. *J. Comput. Phys.*, 229(9) :3091 – 3120, 2010.
- [21] X. Zhang, Y. Xia, C.-W. Shu. Maximum-principle-satisfying and positivity-preserving high order discontinuous Galerkin schemes for conservation laws on triangular meshes. *J. Sci. Comp.*, 50 :29–62, 2012.
- [22] J.G. Zhou, D.M. Causon, and C. G. Mingham. The surface gradient method for the treatment of source terms in the shallow-water equations. *J. Comput. Phys.*, 168 :1–25, 2001.