Applications linéaires

Savoir-Faire
1 Exprimer la matrice d'une application linéaire dans une base.
2 Changement de bases.
3 Manipulation d'un endomorphisme générique.
4 Maîtrise des notions d'image et de noyau.
5 Démonstration du fait que deux sev soient supplémentaires.

1. Matrice d'une application linéaire

Exercice 1. On définit l'application linéaire $u : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ par

$$u(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} x + 6y - z \\ x + z \\ x - 3y + 2z \end{pmatrix}.$$

a. Ecrire la matrice A de u dans la base canonique.
b. Donner une base et des équations pour $\mathrm{Im}(u)$.
c. Montrer que les sous-espaces vectoriels $\mathrm{Ker}(u)$ et $\mathrm{Ker}(u - 3id)$ sont de dimension 1. Donner en des bases.
d. Calculer u^2 et déterminer une base de $\mathrm{Ker}(u^2)$.
e. Construire une base $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ de $\mathbb{R}^3$ telle que (ε_1) soit une base de $\mathrm{Ker}(u-3id)$, (ε_2) soit une base de $\mathrm{Ker}(u)$ et $(\varepsilon_2, \varepsilon_3)$ soit une base de $\mathrm{Ker}(u^2)$.
f. Déterminer la matrice de u dans la base $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$.

Exercice 2. Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à deux.
Pour a dans $\mathbb{R}$, on considère $\varphi_a : E \longrightarrow E$, $P(X) \longmapsto P(X + a)$.
a. L'application φ_a est-elle linéaire ? Si oui, déterminer sa matrice M_a dans la base canonique.
b. Montrer que, si a et b sont deux nombres réels alors $M_a M_b = M_{a+b}$.
c. Montrer que M_a est inversible et calculer son inverse.

Exercice 3. Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à trois.
On considère $I : \mathbb{R}^2[X] \longrightarrow \mathbb{R}^3[X]$, $P \longmapsto \int_0^X P(t)dt$ et $D : \mathbb{R}^3[X] \longrightarrow \mathbb{R}^2[X]$, $P \longmapsto P'$.
a. Montrer que I et D sont linéaires.
b. Calculer les matrices M_I et M_D de I et de D dans les bases canoniques.
c. Calculer le produit $M_D M_I$.

2. Un exemple géométrique

Exercice 4. On se place dans le plan euclidien muni d'un repère orthonormé $(0, i, j)$. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. On considère la rotation ρ_θ de centre 0 et d'angle θ. On rappelle que ρ_θ est bijectiven préserve les longueurs et que l'image d'une droite est une droite.

(1) En interprétant géométriquement la somme de deux vecteurs, montrer que ρ_θ est linéaire.
(2) Déterminer la matrice M_θ de ρ_θ dans la base canonique.
(3) Soit $\theta' \in \mathbb{R}$. Justifier $\rho_{\theta+\theta'} = \rho_\theta \circ \rho_{\theta'}$.
(4) En déduire des formules pour $\sin(\theta + \theta')$ et $\cos(\theta + \theta')$.

3. Changement de bases

Exercice 5. Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ de matrice $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ dans la base canonique. Déterminer la matrice de f dans la base $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

Exercice 6. On note (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans le base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} 15 & -11 & 5 \\ 20 & -15 & 8 \\ 8 & -7 & 6 \end{pmatrix}.$$

Soient $\varepsilon_1 = 2e_1 + 3e_2 + e_3$, $\varepsilon_2 = 3e_1 + 4e_2 + e_3$ et $\varepsilon_3 = e_1 + 2e_2 + 2e_3$.

a. Montrer que $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

b. Calculer $f(\varepsilon_1)$, $f(\varepsilon_2)$ et $f(\varepsilon_3)$ dans la base $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$.

c. En déduire la matrice B de f dans la base $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$.

d. Expliciter une matrice inversible P telle que $A = PBP^{-1}$ ou $B = PAP^{-1}$ (et préciser laquelle de ces 2 relations est satisfaite).

e. Calculer B^4 et A^4.

4. Image et Noyau

Exercice 7. Soit E un espace vectoriel et f un endomorphisme de E. On suppose que $\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f) = \{0\}$. Soit x tel que $f(x) \neq 0$. Montrer que pour tout entier naturel n, $f^n(x) \neq 0$.

Exercice 8. Soit E un espace vectoriel et, f et g deux endomorphismes de E. On suppose que $f \circ g = g \circ f$. Montrer que $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont stables par g.

Exercice 9. Soit $p \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme de l'espace vectoriel réel E de dimension. On dit que p est un projecteur si $p^2 = p$, ce que l'on suppose désormais.

a. Soit x un vecteur quelconque de E. Montrer que $x - p(x)$ appartient à $\mathrm{Ker}(p)$.

b. Soit x dans l'image de p. Montrer que $p(x) = x$.

c. Soit y dans E. Montrer que si $p(y) = -y$ alors $y = 0$.

d. Montrer que $E = \mathrm{Ker}(p) \oplus \mathrm{Im}(p)$.

e. Soit $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ des bases de $\mathrm{Ker}(p)$ et $\mathrm{Im}(p)$ respectivement. Expliquer pourquoi la concaténation de $\mathcal{B}$ et de $\mathcal{C}$ est une base de E.

f. Quelle est la matrice de p dans cette base de E ? Faire le lien entre la définition de projecteur vu en cours et celle de l'exercice.

g. Soit q un second projecteur de E. Montrer que $p + q$ est un projecteur si et seulement si $p \circ q = -q \circ p$.

h. Montrer que $p \circ q = -q \circ p$ si et seulement si $p \circ q = q \circ p = 0$.
Indication. Montrer séparemment que $p \circ q(x) = 0$ si x appartient à $\mathrm{Ker}(p)$ ou à $\mathrm{Im}(p)$. Conclure.

5. Théorème du rang

Exercice 10. Donner si possible des exemples d'endomorphismes f de $\mathbb{R}^2$ tels que

a. $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Im}(f)$;

b. $\mathrm{Ker}(f)$ soit non nul et strictemement inclus dans $\mathrm{Im}(f)$;

c. $\mathrm{Im}(f)$ soit non nul et strictemement inclus dans $\mathrm{Ker}(f)$.

Exercice 11. Mêmes questions que l'exrcice précédent mais pour les endomorphismes de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 12. Soit E un espace vectoriel de dimension n et f un endomorphisme de E. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

a. $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Im}(f)$;

b. $f^2 = 0$ et $n = 2\,\mathrm{rg}(f)$.

Exercice 13. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme de l'espace vectoriel E de dimension finie.

a. Montrer les inclusions suivantes

$$\mathrm{Ker}(u) \subset \mathrm{Ker}(u^2) \subset \mathrm{Ker}(u^3) \subset \cdots$$

b. Montrer que u envoie $\mathrm{Ker}(u^2)$ dans $\mathrm{Ker}(u) \cap \mathrm{Im}(u)$.

c. Montrer que l'application $v : \mathrm{Ker}(u^2) \longrightarrow \mathrm{Ker}(u) \cap \mathrm{Im}(u), x \longmapsto u(x)$ est surjective.

d. En déduire l'inégalité

$$\dim(\mathrm{Ker}(u^2)) \leq 2\dim(\mathrm{Ker}(u)).$$

e. Donner un exemple d'endomorphisme u pour lequel $\dim(\mathrm{Ker}(u^2)) = 2\dim(\mathrm{Ker}(u))$.

6. Exercices de Synthèses

Exercice 14. Soit E un espace vectoriel de dimension 3 et f un endomorphisme non nul de E tel que $f^2 = 0$.

a. Montrer que $\mathrm{Im}(f)$ est inclus dans $\mathrm{Ker}(f)$. En déduire le rand de f.

b. Soit ε_3 un vecteur de E tel que $f(\varepsilon_3) \neq 0$. Posons $\varepsilon_2 = f(\varepsilon_3)$. Montrer qu'il existe ε_1 dan E tel que $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ soit une base de $\mathrm{Ker}(f)$.

c. Montrer que $\mathcal{B} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ est une base de E.

d. Déterminer la matrice M de f dans la base $\mathcal{B}$.

e. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans le base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} -3 & -6 & 3 \\ 2 & 4 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Dans le poly, l'endomorphisme f est noté $\tilde{A}$.

Vérifier que $A^2 = 0$. Trouver une base $\mathcal{B} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ comme ci-dessus pour f.

f. Trouver une matrice inversible P telle que

$$M = PAP^{-1}.$$