GLMA201 - Algèbre linéaire et Analyse 2 - 2011-2012

Calcul Matriciel

Savoir-Faire
1. Somme et produit des matrices explicites.
2. Inversion d'une matrice explicite.
3. Manipulations algébriques sur les matrices.
4. Démonstrations simples avec manipulation des indices.

---

1. Matrices 2×2

Exercice 1. Quaternions. Dans cet exercice la matrice identité de taille 2 est notée $\mathbf{1}$. Dans $M_2(\mathbb{C})$, on définit les trois matrices suivantes :

$$I := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad J := \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \quad K := \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}.$$

a. Vérifier que $I^2 = J^2 = K^2 = -\mathbf{1}$.
b. Vérifier que $IJ = -JI = K$, $JK = -KJ = I$ et $KI = -IK = J$.
c. Montrer que si $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, on a

$$(a\mathbf{1} + bI + cJ + dK)(a\mathbf{1} - bI - cJ - dK) = (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)\mathbf{1}.$$

d. En déduire que $M = a\mathbf{1} + bI + cJ + dK$ est inversible si et seulement si elle est non nulle.

Exercice 2. Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice 2×2. On définit sa trace par $\mathrm{tr}(A) = a + d$ et son déterminant par $\det(A) = ad - bc$.
a. Vérifier l'équation (Théorème de Cayley-Hamilton) :

$$A^2 - \mathrm{tr}(A)A + \det(A)I_2 = 0.$$

b. Posons $\hat{A} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$. Vérifier que $\hat{A}A = A\hat{A} = \det(A)I_2$.
c. Montrer que A est inversible si et seulement si $\det(A) \neq 0$ et que dans ce cas

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

d. Montrer que : $A^2 = 0$ si et seulement si $\mathrm{tr}(A) = \det(A) = 0$.
e. Montrer que pour deux matrices carrées A et B de taille 2, on peut avoir $AB \neq BA$ mais que l'on a toujours

$$\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA) \qquad \text{et} \qquad \det(AB) = \det(A)\det(B) = \det(BA).$$

2. Puissances d'une matrice

Exercice 3. Calculer A^2, A^3, A^4 puis A^n (pour tout entier naturel n) dans chacun des cas suivants :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 4. On considère la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

a. Calculer A^2 et A^3.

b. Montrer que pour tout entier naturel n, il existe des scalaires a_n et b_n tels que

$$M^n = \begin{pmatrix} 1 & a_n & b_n \\ 0 & 1 & a_n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

c. Déterminer des relations de récurences satisfaites par les suites a_n et b_n. En déduire M^n.

d. On pose $N = M - I_3$. Calculer N^2, N^3 puis N^n, pour $n \in \mathbb{N}$. En déduire que

$$M^n = I_3 + nN + \frac{n(n-1)}{2}N^2.$$

3. Inversibilité

Exercice 5.

a. Résoudre en fonction de a, b et c dans $\mathbb{R}$ le système suivant

$$(S) \qquad \left\{ \begin{array}{lcl} 2x + 2y + 3z & = & a \\ x - y & = & b \\ -x + 2y + z & = & c \end{array} \right.$$

b. En déduire que la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

est inversible et déterminer son inverse.

c. En déduire que la matrice

$$N = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

est inversible et déterminer son inverse.

Exercice 6.

a. Calculer l'inverse de la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & -4 & 5 \end{pmatrix}.$$

b. Déduisez-en les solutions des systèmes

$$\left\{ \begin{array}{lcl} 3x + 2y - z & = & 5 \\ x - y + z & = & 1 \\ 2x - 4y + 5z & = & -3 \end{array} \right. \qquad \left\{ \begin{array}{lcl} 3x + 2y - z & = & -1 \\ x - y + z & = & 3 \\ 2x - 4y + 5z & = & 2 \end{array} \right.$$

Exercice 7. Les matrices suivantes sont-elles inversibles ? Si oui, calculer leur inverse.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & -2 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Exercice 8. Soit $x \in \mathbb{R}^*$ et
$$A = \begin{pmatrix} 0 & x & x^2 \\ \frac{1}{x} & 0 & x \\ \frac{1}{x^2} & \frac{1}{x} & 0 \end{pmatrix}.$$

a. Montrer qu'il existe deux réels λ et μ tels que
$$(A - \lambda I_3)(A - \mu I_3) = 0.$$

b. Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$,
$$A^n = \alpha_n A + \beta_n I_3$$
pour des entiers naturels α_n et β_n.

c. On définit deux suites u_n et v_n par
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \alpha_n - \beta_n \text{ et } v_n = 2\alpha_n + \beta_n.$$
Montrer que les suites u_n et v_n sont géométriques. En déduire les expressions de u_n et de v_n en fonction de n.

d. En déduire une formule pour A^n avec $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 9. Soit n un entier naturel non nul. Pour $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$, on pose
$$\operatorname{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}.$$
Ce nombre qui est donc la somme des éléments diagonaux de A est appelé la *trace de* A.

a. Soit A et B deux matrices de $M_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$.

b. Soit P une matrice inversible de $M_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\operatorname{tr}(PAP^{-1}) = \operatorname{tr}(A)$.

Exercice 10. Soit $A = (a_{ij})$ un matrice dans $M_n(\mathbb{R})$.

a. Montrer que A n'est pas inversible si et seulement s'il existe un vecteur colonne $X \in M_{n1}(\mathbb{R})$ non nul tel que $AX = 0$.

b. On suppose désormais que pour tout $i = 1, \cdots, n$ on a $|a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$. Montrer que A est inversible.

Exercice 11. Matrices magiques.
Une matrice carrée $M \in M_n(\mathbb{R})$ est dite *magique* si la somme de ses coefficients par ligne et par colonne est constante. On note alors $s(M)$ cette valeur commune. Notons $\mathcal{M}$ l'ensemble des matrices magiques et J la matrice de $\mathcal{M}$ dont tous les coefficients sont égaux à 1.

a. Montrer que $M \in \mathcal{M}$ si et seulement s'il existe un scalaire λ tel que $JM = MJ = \lambda J$.

b. En déduire que si A et B appartiennent à $\mathcal{M}$ alors AB appartient à $\mathcal{M}$.

c. Soit A et B deux matrices magiques de taille n. Montrer que $s(AB) = s(A)s(B)$.

d. Soit M une matrice magique inversible. Montrer que M^{-1} est magique.

Exercice 12. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ vérifiant
$$AB = A + B.$$
Montrer que A et B commutent.