GLMA201 - Algèbre linéaire et Analyse 2 - 2011-2012

Déterminants

Savoir-Faire
1 Calcul explicite de déterminants par opérations élémentaires.
2 Opérations élémentaires sur des matrices de taille n.
3 Utilisation de la définition de det pour montrer ses propriétés.
4 Utilisation de la n-linéarité.

---

1. Calculs explicites

Exercice 1. Calculer les déterminants suivants

$$\begin{vmatrix} 4 & -3 & 5 \\ 3 & -2 & 8 \\ 1 & -7 & -5 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & -4 & 3 \\ 2 & -1 & 4 & -2 \\ 3 & -1 & 4 & -2 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}.$$

Exercice 2. Calculer les déterminants suivants

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1+i \\ 0 & 1 & i \\ 1 & -i & -i+1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \alpha & x & x \\ x & \beta & x \\ x & x & \gamma \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha & 1 \\ \sin\beta & \cos\beta & 1 \\ \sin\gamma & \cos\gamma & 1 \end{vmatrix},$$

où i le nombre complexe, α, β, γ et x sont des nombres réels.

Exercice 3. Calculer les déterminants suivants

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 7 & 6 & 3 & 7 \\ 3 & 5 & 7 & 2 \\ 5 & 4 & 3 & 5 \\ 5 & 6 & 5 & 4 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 3 & -5 & 2 & -4 \\ -3 & 4 & -5 & 3 \\ -5 & 7 & -7 & 5 \\ 8 & -8 & 5 & -6 \end{vmatrix}.$$

Exercice 4. Démontrer les identités suivantes

$$\begin{vmatrix} 1 & a & bc \\ 1 & b & ca \\ 1 & c & ab \end{vmatrix} = (b-c)(c-a)(c-b), \qquad \begin{vmatrix} a_1+b_1x & a_1x+b_1 & c_1 \\ a_2+b_2x & a_2x+b_2 & c_2 \\ a_3+b_3x & a_3x+b_3 & c_3 \end{vmatrix} = (1-x^2)\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

2. Manipulations

Exercice 5. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que ${}^tA = \bar{A}$. Montrer que $\det A \in \mathbb{R}$.

Exercice 6. Soit A une matrice antisymétrique d'ordre $2n+1$. Montrer que $\det A = 0$.
Ce résultat est-il encore vrai lorsque A est d'ordre pair ?

Exercice 7. Comparer $\det(a_{i,j})$ et $\det((-1)^{i+j}a_{i,j})$ où $(a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Exercice 8. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant

$$\forall i,j \in \{1,\dots,n\}, a_{i,j} \in \{1,-1\}$$

Montrer que 2^{n-1} divise $\det A$.

3. Déterminants de taille n

Exercice 9. Soient $a \neq b$ et $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$. On pose

$$\Delta_n(x) = \begin{vmatrix} \lambda_1 + x & a+x & \cdots & a+x \\ b+x & \lambda_2 + x & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a+x \\ b+x & \cdots & b+x & \lambda_n + x \end{vmatrix}_{[n]}$$

a. Montrer que $\Delta_n(x)$ est une fonction affine de x.
b. Calculer $\Delta_n(x)$ et en déduire $\Delta_n(0)$.

Exercice 10. Calculer en établissant une relation de récurrence

$$D_n = \begin{vmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ -1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ -1 & \cdots & -1 & 0 \end{vmatrix}_{[n]}$$

Exercice 11. Soient $x_1, \cdots, x_n$ des nombres complexes. Le but de cet exercice est de calculer le déterminant de Vandermonde suivant

$$V(x_1, \cdots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

a. On suppose $x_1, \cdots, x_{n-1}$ fixés et 2 à 2 distincts et on se donne une indéterminée X. Montrer que $V(x_1, \cdots, x_{n-1}, X)$ est un polynôme en X de degré au plus $n-1$ que nous noterons P.
b. Montrer que $x_1, \cdots, x_{n-1}$ sont des racines de P.
c. En déduire qu'il existe λ ne dépendant que de $x_1, \cdots, x_{n-1}$ tel que

$$P(T) = \lambda. \prod_{i=1}^{n-1} (T - x_{n-1}).$$

d. Montrer que $\lambda = \lim_{t \to 0} P(1/t) t^{n-1}$.
e. En déduire que

$$\lambda = \lim_{t \to 0} \begin{vmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_{n-1} & \cdots & x_{n-1}^{n-1} \\ t^{n-1} & t^{n-1} & \cdots & 1 \end{vmatrix} = VDM(x_1, \cdots, x_{n-1}).$$

f. En déduire que

$$V(x_1, \cdots, x_n) = \prod_{1 \leq < i < j \leq n} (x_j - x_i).$$

Exercice 12. Soient $A, B \in M_n(\mathbb{R})$. Démontrer que

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix} = \det(A+B) det(A-B).$$

4. Exercice de synthèse

Exercice 13.
a. Soit $a, b, c, d : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ des fonctions dérivables. Montrons que $f = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ est dérivable et que

$$f'(x) = \begin{vmatrix} a'(x) & b(x) \\ c'(x) & d(x) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a(x) & b'(x) \\ c(x) & d'(x) \end{vmatrix}.$$

b. Généraliser à un déterminant de taille 3.
c. Calculer le déterminant

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos x & \sin x \\ 1 & \cos(x+\alpha) & \sin(x+\alpha) \\ 1 & \cos(x+\beta) & \sin(x+\beta) \end{vmatrix}.$$