UNIVERSITÉ MONTPELLIER 2
SCIENCES ET TECHNIQUES

GLMA201 - Algèbre linéaire et Analyse 2 - 2011-2012

Equations différentielles

Savoir-Faire
1 Résolution des équations différentielles linéaires homogènes du premier ordre.
2 Méthode de variation de la constante.
3 Résolution d'une équation linéaire inhomogène avec la connaissance d'une solution particulière.
4 Mise en oeuvre d'un changement de fonction inconue.
5 Résolution des équations différentielles linéaires homogènes du deuxième ordre à coefficients constants.
6 Mise en oeuvre de la méthode de « variation de la constante »pour les équations de degré 2.

1. Résolutions

Exercice 1. Résoudre les équations différenteilles suivantes :

(1)
$$\begin{cases} y' + 2y = 0, \\ y(0) = 3. \end{cases}$$

(2)
$$\begin{cases} y' + 2y = 3, \\ y(0) = -1. \end{cases}$$

(3)
$$\begin{cases} y' - 2y = -4t, \\ y(0) = 3. \end{cases}$$

(4)
$$\begin{cases} (1 + x^2)\, y' + 2xy = 1 + 3x^2 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Exercice 2. Résoudre les équations différentielles suivantes :

(1) $y'' - 3y' + 2y = e^x$.
(2) $y'' - y = -6\cos x + 2x \sin x$.
(3) $4y'' + 4y' + 5y = \sin x e^{-\frac{x}{2}}$.

Exercice 3. Soit (E) l'équation
$$2y' - y = -t^2 + 5t.$$

(1) Déterminer une solution particulière y_0 de (E) sous la forme $y_0(t) = At^2 + Bt + C$.
(2) Résoudre, sur $\mathbb{R}$, l'équation (E_0) homogène associée à (E).
(3) En déduire la solution générale de (E).
(4) En déduire une solution de (E) vérifiant la condition $y(-1) = 5$.

2. Exercices de Synthèses

Exercice 4. On se propose d'intégrer sur l'intervalle le plus grand possible contenu dans $]0, +\infty[$, l'équation différentielle :
$$(E) \qquad y'(x) - y(x) - y(x)^2 = x^2.$$

(1) Déterminer $a \in \mathbb{R}$, tel que $y(x) = ax$ soit une solution particulière y_0 de (E). On suppose désormais $a > 0$.
(2) Montrer que le changement de fonction inconnue :
$$y(x) = y_0(x) - \frac{1}{z(x)}$$
transforme l'équation (E) en l'équation différentielle
$$(E1) \qquad z'(x) + (6x + \frac{1}{x})z(x) = 1.$$

(3) Intégrer $(E1)$ sur $]0,+\infty[$.

(4) Donner toutes les solutions de (E) définies sur $]0,+\infty[$.

Exercice 5. On consière l'équation :

$$y'' + 2y' + 4y = xe^x. \qquad (E)$$

(1) Résoudre l'équation différentielle homogène associée à (E).

(2) Trouver une solution particulière de (E), puis donner l'ensemble de toutes les solutions de (E).

(3) Déterminer l'unique solution h de (E) vérifiant $h(0) = 1$ et $h(1) = 0$.

(4) Soit $f :]0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable sur $]0,+\infty[$ et qui vérifie :

$$t^2 f''(t) + 3tf'(t) + 4f(t) = t \log t.$$

 (a) On pose $g(x) = f(e^x)$, vérifier que g est solution de (E).

 (b) En déduire une expression de f.

Exercice 6. On dit qu'une fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est *paire* (resp. *impaire*) si pour tout x dans $\mathbb{R}$, on a $f(-x) = x$ (resp. $f(-x) = -f(x)$). Soit E l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Soit E_+ et E_- l'ensemble des fonctions paires et impaires respectivement.

(1) Montrer que E_+ et E_- sont des sous-espaces vectoriels de E.

(2) Montrer que $E = E_+ \oplus E_-$.

(3) Déterminer les fonctions $f \in E$ deux fois dérivables telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f''(x) + f(-x) = x \cos x.$$

Exercice 7. Considérons l'équation différentielle

$$(E) \qquad y' = y^2.$$

Supposons qu'une solution $t \longmapsto y_0(t)$ ne s'annule pas sur un intervale I.

(1) Trouver une primitive à la fonction $I \longrightarrow \mathbb{R}$, $t \longmapsto \frac{y_0'}{y_0^2}$.

(2) En déduire qu'il existe une constante C telle que

$$(E_1) \qquad y_0(t) = \frac{-1}{t + C}.$$

(3) Fixons maintenant c dans $\mathbb{R}^*$. On s'intéresse au système

$$\begin{cases} y' = y^2, \\ y(0) = c. \end{cases}$$

Soit (y, I) une solution de ce système. Expliquer pourquoi pour toute solution y, il existe un intervalle ouvert J inclus dans I et contenant 0 tel que y ne s'annule pas sur J.

(4) En déduire la valeur de y.

(5) Que pouvez-vous dire de l'intervalle de définition de y ?