GLMA201 - Algèbre linéaire et Analyse 2 - 2011-2012

Permutations

Savoir-Faire
1. Composer, inverser ds permutations.
2. Calculer la décomposition en cycles à supports disjoints.
3. Calculer la signature d'une permutation explicite.
4. Utilisation de la définition de la signature.

1. Questions de cours

Exercice 1. Quel est le cardinal de S_n ?

2. Calculs de signature

Exercice 2. On considère les éléments suivants de S_9,

$$\sigma = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 2 & 9 & 3 & 6 & 4 & 1 & 7 & 8 & 5 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \tau = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 6 & 2 & 7 & 4 & 1 & 9 & 5 & 8 \end{bmatrix}.$$

a. Calculer $\sigma \circ \tau$, $\tau \circ \sigma$, σ^{-1} et τ^{-1}.
b. Écrire σ et τ comme produit de cycles à supports disjoints.
c. Calculer la signature de σ et τ.

Exercice 3. Calculer la signature de la permutation

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n & n+1 & n+2 & \cdots & 2n \\ 1 & 3 & 5 & \cdots & 2n-1 & 2 & 4 & \cdots & 2n \end{bmatrix}.$$

3. Cycles

Exercice 4. Soit n un entier naturel non nul et $0 \leq p, q \leq n$. Soit $a_1, \cdots, a_p$ (resp. $a'_1, \cdots, a'_q$) des entiers entre 1 et n deux à deux distincts. Soit c et c' les deux cycles suivants de S_n : $c = (a_1\ a_2\ \cdots\ a_p)$ et $c' = (a'_1\ a'_2\ \cdots\ a'_q)$. Quand est-ce que $c = c'$?

Exercice 5. Soit $c = (3\ 8\ 2)(5\ 6)(1\ 4\ 8\ 7) \in S_9$.
a. Ecrire c sous forme « application de $\{1, \cdots, 9\}$ dans lui-même ».
b. Calculer c, c^2, c^{-1}. On pourra exprimer les résultats sous forme d'applications ou de produit de cycles à supports disjoints. Calculer la signature de c.
c. Soit $c' = (3\ 4\ 2)(5\ 7)(8\ 2\ 1\ 6) \in S_8$. Calculer c'^{-1}.

4. Exercices de Synthèses

Exercice 6. Soit S_n l'ensemble des bijections de l'ensemble $1, \cdots, n$. Pour $\sigma \in S_n$ et k un entier naturel non nul, on note σ^k la permutation obtenue en composant σ k fois avec elle-même. Par convention $\sigma^0 = \mathrm{Id}$ et $\sigma^{-k} = (\sigma^{-1})^k$.
a. Soit $\sigma \in S_n$. Montrer qu'il existe deux entiers distincts strictement positifs k et l tels que $\sigma^k = \sigma^l$.
b. En déduire qu'il existe un entier strictement positif k tel que $\sigma^k = \mathrm{Id}$.

Le minimum des entiers k comme ci-dessus est appelé l'ordre de σ et on le note $\mathrm{ord}(\sigma)$.

c. Montrer que si $\sigma^k = \mathrm{Id}$ alors $\mathrm{ord}(\sigma)$ divise k.
d. Montrer que l'ordre d'un cycle est sa longueur.
e. On considère l'écriture de σ comme produit de cycles à supports disjoints. Montrer que l'ordre de σ est le ppcm des ordres de ces cycles.

Exercice 7. Trouver la décomposition en produit de cycles à supports disjoints, la signature, l'ordre et une décomposition en produit de transpositions des permutations suivantes de S_{10} :

$$\sigma = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 3 & 7 & 1 & 4 & 2 & 6 & 9 & 8 & 5 & 10 \end{bmatrix}$$

et

$$\tau = (10\,3\,4\,1)(8\,7)(4\,7)(5\,6)(2\,6)(2\,9).$$

Calculer σ^{2012} et τ^{2012}.

Exercice 8. Combien y-a-t-il d'anagrammes du mot MATH ? Combien y-a-t-il d'anagrammes du mot MOTO ?

Exercice 9. On rappelle qu'un élément x de $\{1, \ldots, n\}$ est un point fixe pour une permutation σ si $\sigma(x) = x$.
a. Pour $n \geq 2$, déterminer le nombre de permutations de S_n qui fixent l'entier 2.
b. Soit d_n le nombre de permutations de S_n qui n'ont pas de point fixe. Montrer que

$$d_n = (n-1)(d_{n-1} + d_{n-2}).$$

c. Déterminer le nombre de permutations de S_7 qui ont au moins un point fixe.