Cours-TD d'analyse : MA1

E.Bretin, C. Reichert et S. Thery

INSA INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES LYON
Pole Math

1 Espace de Hilbert et base orthogonale

2 Application aux séries de Fourier

3 Distributions

Définition 1 (Espace Vectoriel)

Un espace vectoriel V sur $\mathcal{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ est un ensemble muni d'une loi de composition interne d'addition $+ : V \times V \to V$ et d'une loi de composition externe de multiplication $. : \mathcal{K} \times V \to V$ satisfaisant les propriétés suivantes

1) *Propriété de la loi interne* $+ : \forall (u, v, w) \in V^3$,
   - $u + v = v + u$,
   - $u + (v + w) = (u + v) + w$,
   - *Il existe un élément* $0 \in V$ *tel que* $u + 0 = u, \forall u \in V$
2) *Propriété de la loi externe* $. : \forall (u, v) \in V^2, \forall (\lambda, \mu) \in \mathcal{K}^2$
   - $\lambda(\mu u) = (\lambda\mu)u$,
   - $\lambda(u + v) = \lambda u + \lambda v$,
   - $(\lambda + \mu)u = \lambda u + \mu v$,
   - *Il existe un élément* $1 \in \mathcal{K}$ *tel que* $1u = u, \forall u \in V$
3) *Stabilité :* $\forall (u, v) \in V^2$, $\forall (\lambda, \mu) \in \mathcal{K}^2$,

$$\lambda u + \beta v \in V$$

Exemples d'espaces vectoriels

De dimension finie

$$\mathbb{R}^3 = \{x = (x_1, x_2, x_3)\ ;\ \forall i = 1:3,\ x_i \in \mathbb{R}\}$$

$$\mathbb{C}^N = \{x = (x_1, x_2, \cdots, x_N)\ ;\ \forall i = 1:N,\ x_i \in \mathbb{C}\}$$

$$\mathbb{R}^N[X] = \text{Ensemble des polynômes réels de degré } N$$

De dimension infinie

$$\mathbb{R}^{\mathbb{N}} = \{x = (x_1, x_2, x_3 \cdots\ );\ \forall i = \mathbb{N}^*,\ x_i \in \mathbb{R}\}$$

$$C^0([0,1], \mathbb{R}) = \{f : [0,1] \to \mathbb{R}\ ;\ f \text{ continue}\}$$

$$L^2(\mathbb{R}) = \left\{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\ ;\ \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx < \infty\right\}$$

INSA INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES LYON
Pole Math

Définition 2 (Famille libre)

Une famille $\{e_i\}_{i=1:N}$ de V est dite libre si

$$\sum_{i=1}^{N} \lambda_i e_i = 0 \Longrightarrow \lambda_i = 0, \forall i = 1 : N$$

Définition 3 (Famille génératrice)

Une famille $\{e_i\}_{i=1:N}$ de V est dite génératrice si pour tout $u \in V$, $\exists(\lambda_1, \lambda_2 \cdots \lambda_N) \in \mathcal{K}^N$ tels que

$$u = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i e_i$$

Définition 4 (Base)

Une famille $\{e_i\}_{i=1:N}$ est une base de V si c'est une famille libre et génératrice.

Exemple

La famille $\{1, X, X^2\}$ est une base de $\mathbb{R}^2[X]$. En particulier, tout polynôme p de degré 2 peut s'écrire sous la forme

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2.$$

Exercice 1

Montrer que la famille $\{X(X+1), (X+1)(X-1), X(X-1)\}$ *est une base de* $\mathbb{R}^2[X]$ *et expliciter la décomposition d'un polynôme* $p \in \mathbb{R}^2[X]$ *dans cette base.*

Cas de la dimension infinie

Soit V un espace vectoriel de dimension infinie :

Définition 5 (Famille libre)

Une famille $\{e_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ de V est dite libre si, $\forall N \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{i=1}^{N} \lambda_i e_i = 0 \Longrightarrow \lambda_i = 0, \forall i = 1 : N$$

Définition 6 (Famille génératrice)

Une famille $\{e_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ de V est dite génératrice si pour tout $u \in V$, $\exists(\lambda_1, \lambda_2 \cdots)$ tels que

$$u \quad " = " \quad \lim_{N\to\infty} \sum_{i=1}^{N} \lambda_i e_i$$

Problème : Il faut définir une notion de distance entre les éléments de l'espace vectoriel V

Notion de norme

Définition 7 (Norme)

Soit V un espace vectoriel. Une application $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}^+$ est une norme si elle vérifie les propriétés suivantes :

1) *Positivité :* $\forall u \in V$,

$$\|u\| \geq 0, \quad \text{et} \quad \|u\| = 0 \Rightarrow u = 0,$$

2) *Homogénéité :* $\forall (\lambda, u) \in \mathcal{K} \times V$,

$$\|\lambda u\| = |\lambda| \, \|u\|,$$

3) *Inégalité triangulaire :* $\forall (u, v) \in V^2$,

$$\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|.$$

Définition 8 (Espace vectoriel normée)

Un espace vectoriel normé est un espace vectoriel muni d'une norme $\|\cdot\|$

Exemples de normes

Soit $V = \mathbb{R}^N$, alors avec $x = (x_0, x_1, \cdots, x_N) \in V$,

$$\begin{cases} \|x\|_2 & = \sqrt{\sum_{i=1}^N x_i^2} \\ \|x\|_\infty & = \max_{i=1:N} \{|x_i|\} \\ \|x\|_p & = \left(\sum_{i=1}^N |x_i|^p\right)^{1/p} \end{cases}$$

Soit $V = C^0([0,1], \mathbb{R})$, alors avec $f \in V$,

$$\begin{cases} \|f\|_2 & = \sqrt{\int_0^1 |f(t)|^2 dx} \\ \|f\|_\infty & = \sup_{t\in[0,1]} \{|f(t)|\} \\ \|f\|_p & = \left(\int_0^1 |f(t)|^p\right)^{1/p} \end{cases}$$

Exercice 2

Montrer que l'application $\|\cdot\|_\infty$ est bien une norme de $V = C^0([0,1], \mathbb{R})$

Définition 9 (Famille génératrice)

Soit V un espace vectoriel de dimension infinie muni d'une norme $\|.\|$ ne famille $\{e_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ de V est dite génératrice si pour tout $u \in V$, $\exists(\lambda_1, \lambda_2 \cdots)$ tels que

$$\lim_{N\to\infty} \|u - \sum_{i=1}^{N} \lambda_i e_i\| = 0$$

Problème : Comment déterminer 'facilement' la décomposition d'une élément $v \in V$ dans la base $\{e_i\}_{i\in\mathbb{N}}$

Définition 10 (Produit scalaire)

Soit V un espace vectoriel. Une application $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{C}$ est un produit scalaire si elle vérifie les propriétés suivantes :

1) *Positivité :* $\forall u \in V$,

$$\langle u, u \rangle \geq 0, \quad \text{et} \quad \langle u, u \rangle = 0 \Rightarrow u = 0,$$

2) *Linéarité :* $\forall (\lambda, u, v, w) \in \mathcal{K} \times V^3$,

$$\langle \lambda u + v, w \rangle = \lambda \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle$$

3) *Symétrie :* $\forall (u, v) \in V^2$,

$$\langle u, v \rangle = \overline{\langle v, u \rangle}$$

Définition 11 (Espace de Hilbert)

Un espace de Hilbert V est un espace vectoriel normé complet dont la norme $\|.\|$ découle d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$:

$$\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}, \quad \forall v \in V.$$

Exemples de produits scalaires

- Soit $V = \mathbb{C}^N$, alors $\|x\|_2 = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ où,

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{N} x_i \overline{y_i}, \quad \forall (x, y) \in V^2.$$

- Soit $V = C^0([0,1], \mathbb{C})$, alors $\|f\|_2 = \sqrt{\int_0^1 |f(t)|^2 dt} = \sqrt{\langle f, f \rangle}$ où,

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)\overline{g(t)}dt, \quad \forall (f, g) \in V^2.$$

Produit scalaire et norme induite

Soit V un espace de Hilbert muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$.
A partir du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$, on peut définir une norme (norme induite) $\| \cdot \|$ définie $\forall u \in V$

$$\|u\| := \sqrt{\langle u, u \rangle}.$$

Propriété 1 (Inégalité de Cauchy Schwarz)

$\forall (u, v) \in V^2$,

$$\langle u, v \rangle \leq \|u\| \, \|v\|.$$

Exercice 3

Soient $(x, y) \in V^2$. Etudier le déterminant du polynôme p défini par

$$p(t) = \|x + ty\|^2 = \langle x + ty, x + ty \rangle$$

En déduire l'inégalité de Cauchy Schwarz et que l'application $u \to \sqrt{\langle u, u \rangle}$ est bien une norme de V

Norme induite et égalité du parallélogramme

Propriété 2 (Égalité du parallélogramme)

Si $\|\cdot\|$ *est la norme induite d'un produit scalaire* $\langle\cdot,\cdot\rangle$ *alors,* $\forall (u,v) \in V^2$,

$$\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = 2\left(\|u\|^2 + \|v\|^2\right)$$

Et inversement,

$$\begin{cases} Re\left(\langle u,v\rangle\right) &= (\|u+v\|^2 - \|u\|^2 - \|v\|^2)/2, \\ Im\left(\langle u,v\rangle\right) &= Re\left(\langle u,iv\rangle\right) = (\|u+iv\|^2 - \|u\|^2 - \|v\|^2)/2, \end{cases}$$

Exercice 4

Soit $V = \mathbb{R}^N$. *Montrer que la norme* $\|x\|_\infty = \max_{i=1:N}\{|x_i|\}$ *ne peut pas être induite d'un produit scalaire.*

Famille orthogonale, orthonormée

Définition 12

Soit V un espace de Hilbert muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$.
Une famille $\{e_i\}_{i \in I}$ est dite orthogonale si $\forall (i,j) \in I^2$,

$$\langle e_i, e_j \rangle = \begin{cases} \|e_i\|^2 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Elle est de plus dite orthonormée si $\forall i \in I$,

$$\|e_i\|^2 = 1.$$

Propriété 3

Une famille $\{e_i\}_{i \in I}$ orthogonale est libre.

Remarque

Si V est un espace vectoriel de dimension N et si $\{e_i\}_{i\in I}$ est une famille orthogonales à N éléments, alors $\{e_i\}_{i\in I}$ est une base orthogonale de V.

Exercice 5

Soit $V = C^0([-1,1],\mathbb{R})$ *l'espace de Hilbert muni du produit scalaire* $\langle\cdot,\cdot\rangle$ *défini pour tout* $(f,g) \in V^2$ *par*

$$\langle f,g\rangle = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f(t)g(t)dt.$$

Les familles $\{1, X, X^2\}$ *et* $\{1, X, X^2 - 1/3\}$ *sont elles orthogonales ?*

Propriété 4 (Décomposition dans une base orthogonale et égalité de Parseval)

Soit V un espace de Hilbert muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et soit $\{e_i\}_{i \in I}$ une base orthogonale. *Alors,*

Décomposition dans une base orthogonale :

$$v = \sum_{i \in I} \frac{\langle v, e_i \rangle}{\|e_i\|^2} e_i, \quad \forall v \in V$$

Egalité de Parseval :

$$\langle u, v \rangle = \sum_{i \in I} \frac{\langle u, e_i \rangle \overline{\langle v, e_i \rangle}}{\|e_i\|^2}, \quad \forall (u, v) \in V^2$$

En particulier

$$\|u\|^2 = \sum_{i \in I} \frac{|\langle u, e_i \rangle|^2}{\|e_i\|^2}.$$

Preuve

On admet que V est un espace de Hilbert de dimension N et que $\{e_i\}_{i\in\{1\cdots N\}}$ est une base orthogonale de V.

Décomposition dans une base orthogonale :

Soit $v \in V$. Comme $\{e_i\}_{i\in\{1\cdots N\}}$ est une base orthogonale, il existe des coefficients $\{\lambda_i\}_{i\in\{1\cdots n\}}$ tels que

$$v = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i e_i.$$

Alors pour tout $j \in \{1 \cdots n\}$,

$$\langle v, e_j\rangle = \langle \sum_{i=1}^{N} \lambda_i e_i, e_j\rangle = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i \langle e_i, e_j\rangle = \|e_j\|^2 \lambda_j,$$

et donc

$$v = \sum_{i=1}^{N} \frac{\langle u, e_i\rangle}{\|e_i\|^2} e_i,$$

Preuve

Egalité de Parseval

Soient $(u, v) \in V^2$. Comme $\{e_i\}_{i\in\{1\dots N\}}$ est une base orthogonale, on en déduit que

$$v = \sum_{i=1}^{N} \frac{\langle v, e_i\rangle}{\|e_i\|^2} e_i \quad \text{et} \quad u = \sum_{j=1}^{N} \frac{\langle u, e_j\rangle}{\|e_j\|^2} e_j,$$

Et donc

$$\begin{aligned}\langle u, v\rangle &= \left\langle \sum_{j=1}^{N} \frac{\langle u, e_j\rangle}{\|e_j\|^2} e_j, \sum_{i=1}^{N} \frac{\langle v, e_i\rangle}{\|e_i\|^2} e_i \right\rangle \\ &= \sum_{j=1}^{N}\sum_{i=1}^{N} \frac{\langle u, e_j\rangle}{\|e_j\|^2} \frac{\overline{\langle v, e_i\rangle}}{\|e_i\|^2} \langle e_i, e_j\rangle = \sum_{i=1}^{N} \frac{\langle u, e_i\rangle \overline{\langle v, e_i\rangle}}{\|e_i\|^2}\end{aligned}$$

Exercice 6 (Transformée de Fourier discrète)

Soit $\ell_N = \mathbb{C}^N$ l'espace des suites finies à valeurs complexes $\mathbf{x} = (x_0, x_1, ..., x_{N-1})$ où $x_n \in \mathbb{C}$ pour $n \in \{0, 1, \cdots, N-1\}$. L'espace ℓ_N est un espace de Hilbert muni du produit scalaire $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \sum_{n=0}^{N-1} x_n \overline{y_n}$. On s'intéresse alors à la base de Fourier discrète composée des éléments $\mathbf{w_k}$ de ℓ_N définis pour $k = 0, ..., N-1$ par

$$\mathbf{w_k} = \left(1, \omega_N^k, \omega_N^{2k}, ..., \omega_N^{(N-1)k}\right), \quad \text{avec} \quad \omega_N = e^{i\frac{2\pi}{N}}$$

- *Expliciter les 5 éléments $\{\mathbf{w_0}, \mathbf{w_1}, \mathbf{w_2}, \mathbf{w_3}, \mathbf{w_4}\}$ lorsque $N = 5$.*
- *Quel est le lien ici avec les séries de Fourier?*
- *Montrer que la famille $\{\mathbf{w_k}\}_{k=0,...,N-1}$ forme une base orthogonale de ℓ_N.*

Exercice 7 (Transformée de Fourier discrète, suite)

- *L'élément* $\mathbf{x} \in \ell_N$ *admet donc la décomposition*

$$\mathbf{x} = \sum_{k=0}^{N-1} \hat{x}_k \mathbf{w_k}, \quad \text{avec} \quad \hat{x}_k \in \mathbb{C}.$$

  Exprimer $\hat{x}_k$ *en fonction des composantes* x_n *de* $\mathbf{x}$.

- *L'application* $\mathbf{x} = (x_0, \ldots, x_{N-1}) \mapsto \hat{\mathbf{x}} = (\hat{x}_0, \ldots, \hat{x}_{N-1})$ *est appelée transformée de Fourier discrète. Trouver la transformée de Fourier discrète inverse*
- *Quelles sont les matrices associées aux applications* $\mathbf{x} \mapsto \hat{\mathbf{x}}$ *et* $\hat{\mathbf{x}} \mapsto \mathbf{x}$?
- *Calculer* $\langle \hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}} \rangle$ *en fonction de* $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$ *pour* $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \ell_N$.

Exercice 8 (Polynômes de Tchebychev)

Soit $V = C^0([-1,1],\mathbb{R})$ *l'espace vectoriel des fonctions réelles continues de* $[-1,1]$ *dans* $\mathbb{R}$ *muni du produit scalaire*

$$\langle f,g\rangle = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx, \quad \textit{pour} \quad (f,g)\in V^2$$

- *Montrer que l'application* $\langle .,. \rangle$ *est un produit scalaire sur* V.
- *On introduit les polynômes de Tchebychev*

$$T_n(x) = \cos(n \arccos(x)), \quad \textit{pour tout} \quad x \in \mathbb{N}.$$

  Montrer que T_n *est un polynôme de degré* n.
- *Montrer que* $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *est une famille orthogonale.*
- *Montrer la relation de récurrence* $T_{n+1} = 2xT_n - T_{n-1}$.
  En déduire T_0, T_1, T_2 *et* T_3.

Projection orthogonale

Soit V un espace de Hilbert et W un sous espace vectoriel de V de dimension n et muni d'une base orthogonale $\{e_i\}_{i\in[1,n]}$.

Définition 13 (Projection orthogonale)

Pour tout $v \in V$, on note $P_W(v)$ l'élément de W définie comme la projection orthogonale de v sur W et vérifiant la propriété suivante :

$$\langle v - P_W(v), w\rangle = 0, \quad \text{pour tout } w \in W.$$

Propriété 5 (Projection orthogonale)

$$P_W(v) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\langle v, e_i\rangle}{\|e_i\|^2} e_i.$$

Exercice 9

Soit V un espace hilbertien et $\{e_i\}_{i\in\mathbb{N}^*}$ une famille orthonormée de V. On note de plus W le sous espace vectoriel engendré par les n premiers éléments de cette famille $W = Vect\{e_1, e_2, \cdots e_n\}$. Soit v un élément de V. On s'intéresse alors au problème de minimisation suivant

$$w^* = \arg\, min_{w\in W} \{\|v - w\|\},$$

qui détermine l'élément w^* le plus proche de v dans W.

- *Avec $\gamma_i = \langle v, e_i\rangle$ et $c_i = \langle w, e_i\rangle$, montrer que $\forall w \in W$,*

$$\|w - v\|^2 = \|v\|^2 - \sum_{i=1}^{n} |\gamma_i|^2 + \sum_{i=1}^{n} |c_i - \gamma_i|^2,$$

- *En déduire que l'élément w^* s'identifie à la projection orthogonale de v dans W.*

Exercice 10

Soit $V = C^0[-1,1]$ *muni du produit scalaire* $\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} f(x)\overline{g(x)}\,dx$.

- *Montrer que la famille composée des trois éléments suivants* $p_0(x) = 1$, $p_1(x) = x$, *et* $p_2(x) = \frac{3x^2-1}{2}$ *est orthogonale.*
- *Soit* $f(x) = x^4$. *Déterminer la projection orthogonale de* f *dans* $\mathbb{R}^2[X]$.

1 Espace de Hilbert et base orthogonale

2 Application aux séries de Fourier

3 Distributions

Séries de Fourier complexes

Soit $V = C_T(\mathbb{C})$ l'ensemble des fonctions continues, T périodiques, de $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ muni du produit scalaire et de la norme induite suivants

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T f(t)\overline{g(t)}\, dt, \quad \|f\|^2 = \frac{1}{T} \int_0^T |f(t)|^2 dt$$

Propriété 6 (Série de Fourier complexe)

La série de Fourier complexe de $f \in V$ s'écrit

$$S_f(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{i\frac{2\pi}{T}nt}, \quad \text{où} \quad c_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) c_n e^{-i\frac{2\pi}{T}nT} dt.$$

L'égalité de Parseval montre de plus que

$$\frac{1}{T} \int_0^T |f(t)|^2 dt = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n|^2$$

Série de Fourier réelles

Soit $V = C_T(\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues, T périodiques, de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ muni du produit scalaire et de la norme induite suivants

$$\langle f, g \rangle = \frac{2}{T} \int_0^T f(t)g(t)\, dt, \quad \|f\|^2 = \frac{2}{T} \int_0^T f(t)^2 dt$$

Soient

$$e_n : t \to \cos(2\pi nt/T) \text{ et } \tilde{e}_n = \sin(2\pi nt/T)$$

des éléments de V.
Alors $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}} \cup \{\tilde{e}_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une famille orthogonale et

$$\|e_0\|^2 = 2, \quad \|e_n\|^2 = 1 \quad \text{et} \quad \|\tilde{e}_n\|^2 = 1, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}^*.$$

Propriété 7 (Série de Fourier réelle)

- *La série de fourier réelle de $f \in V$ s'écrit alors*

$$S_f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \left[a_n \cos(2\pi n t/T) + b_n \sin(2\pi n t/T) \right].$$

où

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos(2\pi n t/T) dt \quad et \quad b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin(2\pi n t/T) dt.$$

L'égalité de Parseval montre de plus que

$$\frac{1}{T} \int_0^T f(t)^2 dt = \frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{n \in \mathbb{N}^*} a_n^2 + b_n^2.$$

Propriété 8 (Dirichlet)

Soit une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, T-périodique et C^1 par morceaux. Alors la série de Fourier de f réelle et complexe définie par

$$\begin{cases} S_f(t) & = \sum_{n \in Z} c_n e^{2i\pi nt/T}, \quad ou \\ S_f(t) & = \frac{a_0}{2} + \sum_{n \in \mathbb{N}^*} [a_n \cos(2\pi nt/T) + b_n \sin(2\pi nt/T)] \end{cases}$$

converge simplement vers la fonction $\tilde{f}$ définie par

$$\tilde{f}(t) = \frac{f(t^+) + f(t^-)}{2}.$$

Exercice 11

Soit f la fonction 2π-périodique définie pour par

$$f(t) = \begin{cases} -1 & si \quad -\pi \leq t < 0 \\ 1 & si \quad 0 \leq t < \pi \end{cases}.$$

(a) *Tracer la fonction f sur l'intervalle $[-2\pi, 2\pi]$.*

(b) *Déterminer la série de Fourier réelle de f et étudier sa convergence.*

(c) *En déduire la valeur des séries suivantes :*

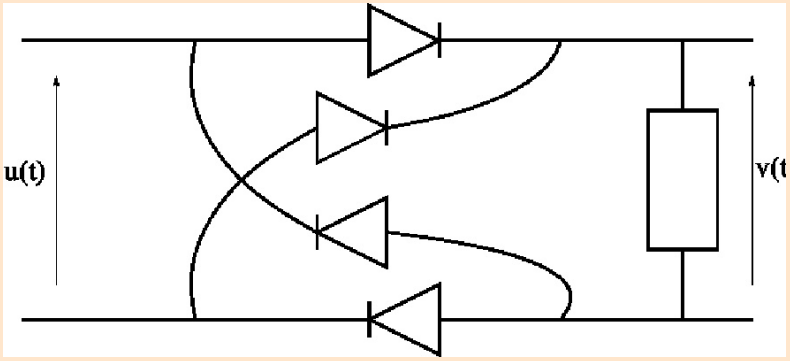
$$S_1 = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{(2p+1)}, \text{ et } \quad S_2 = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(2p+1)^2}.$$

Exercice 12

Soit f la fonction 2π-périodique définie par $f(t) = e^t$ pour $t \in [-\pi, \pi]$. Tracer la fonction f et déterminer la série de Fourier complexe de f.

Exercice 13

On considère le circuit



Soit $u(t) = V\cos(\omega t)$, $V > 0$, $\omega = \frac{2\pi}{T}$, T *la période.*

(a) *Quelle est la tension* $v(t)$ *en sortie et quelle est sa période ?*

(b) *Développer* v *en série de Fourier et étudier sa convergence.*

(c) *Calculer*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4n^2 - 1}.$$

Exercice 14

Soit $\omega \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$. On considère l'équation différentielle $y''(t) + \omega^2 y(t) = x(t)$, où la fonction x est 2π-périodique et définie par $x(t) = t^2$ pour $t \in [-\pi, \pi]$.

(a) *Développer x en série de Fourier.*

(b) *Déterminer les solutions de*

$$y_0'' + \omega^2 y_0 = \frac{\pi^2}{3}, \text{ et } \quad y_n'' + \omega^2 y_n = \frac{4(-1)^n}{n^2}\cos(nt).$$

Astuce : on pourra chercher des solutions de la forme $y_n = c_n \cos(nt)$.

(c) *En déduire la solution générale de l'équation différentielle sous la forme d'une série de Fourier.*

1 Espace de Hilbert et base orthogonale

2 Application aux séries de Fourier

3 Distributions

Motivations

Limite d'une suite de fonctions

Soit f_n définie par

$$f_n(x) = nRect(nx), \forall x \in \mathbb{R}.$$

Sachant que $\int f_n(x)dx = 1$ et que $f_n(x) \to 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$.
Quelle est la limite de f_n ? Et en quel sens ?

Dérivée de la fonction échelon

Soit U la fonction échelon définie par $U(x) = 1_{\mathbb{R}^+}(x)$.
Quelle est la dérivée de U ? En quel sens ?

Transformée de Fourier

Quelle est la transformée de Fourier de la fonction unité : $x \to 1$? En quel sens ?

Motivations

- En 1927, Paul Dirac introduit l'impulsion du Dirac δ

$$\delta(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \neq 0, \\ +\infty & \text{si } t = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \int_{\mathbb{R}} \delta(t)dt = 1.$$

- **Problème :** l'impulsion du Dirac δ n'a pas de sens en tant que fonction.
- Laurent Schwartz (médaille Fields en 1950) introduit un cadre pour définir rigoureusement cette "fonction".
- Idée : regarder une fonction $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ par l'intermédiaire d'un ensemble de filtres φ

$$\varphi \mapsto \int_{\mathbb{R}} f(t)\varphi(t)dt.$$

Définition 14 (Ensemble de fonctions tests)

On note l'ensemble des fonctions tests noté $\mathcal{D}(\mathbb{R})$:

$$\mathcal{D}(\mathbb{R}) = \{\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}); \exists M > 0 \text{ tel que } supp(\varphi) \subset [-M, M]\},$$

où le support de φ est défini par $supp(\varphi) = \{t \in \mathbb{R}; \varphi(t) = 0\}$.

Exemple de fonction test : soit $\rho \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ définie par

$$\rho(t) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{1-t^2}} & \text{si } |t| < 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Définition d'une distribution

Définition 15 (d'une distribution)

Un distribution T est une application

$$\begin{aligned} T : \mathcal{D}(\mathbb{R}) &\mapsto \mathbb{R} \\ \varphi &\mapsto T[\varphi] = \langle T, \varphi \rangle \end{aligned}$$

qui est linéaire et continue. C'est à dire

$$\langle T, \lambda\varphi + \psi \rangle = \lambda \langle T, \varphi \rangle + \langle T, \psi \rangle, \quad \textit{et}$$

$$\lim_{k \to \infty} \langle T, \varphi_k \rangle = 0 \quad \textit{si } \varphi_k \to 0 \textit{ dans } \mathcal{D}(\mathbb{R}).$$

Premiers exemples

Définition 16 (Notion de convergence dans $\mathcal{D}(\mathbb{R})$)

On dit que $\varphi_k \to \varphi$ *dans* $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ *si :*

$$\begin{cases} \exists M > 0 \text{ tel que } supp(\varphi_k) \subset [-M, M], \quad \forall k \in \mathbb{N}, \\ \lim_{k\to\infty} \|\varphi_k^{(m)} - \varphi^{(m)}\|_\infty = 0, \quad \forall m \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Exercice 15

Montrer que les applications δ *et* $T_{\{1\}}$ *définies par*

$$\delta : \varphi \mapsto \varphi(0), \quad \text{et } T_{\{1\}} : \varphi \mapsto \int_{\mathbb{R}} \varphi(t)dt, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$$

sont des distributions.

Notion de distibutions régulières

Définition 17 (distribution régulière)

Une distribution T est dite régulière si il existe une fonction $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ telle que

$$\langle T, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(t)\varphi(t)dt, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}).$$

On notera par la suite $T_{\{f\}}$ la distribution régulière associée à la fonction $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$.

L'espace $L^1_{loc}(\mathbb{R})$ est l'ensemble des fonctions localement intégrables

$$L^1_{loc}(\mathbb{R}) = \left\{ f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}; \int_{-M}^{M} |f(t)|dt < \infty, \quad \forall M > 0 \right\}$$

Exercice 16

- *Soit $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$. Montrer que l'application $T_{\{f\}} : \varphi \mapsto \int_{\mathbb{R}} f(t)\varphi(t)dt$ est bien une distribution.*
- *Montrer que la distribution Dirac δ n'est pas une distribution régulière.*

Premières opérations dans l'espace de distributions

Définition 18 (Somme de deux distribution)

Soient $T_1 \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ et $T_2 \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$, alors la distribution $T_1 + T_2$ est définie par

$$\langle T_1 + T_2, \varphi \rangle := \langle T_1, \varphi \rangle + \langle T_2, \varphi \rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$$

Définition 19 (Multiplication d'une distribution par un scalaire)

Soient $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, alors la distribution αT est définie par

$$\langle \alpha T, \varphi \rangle := \alpha \langle T, \varphi \rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$$

Définition 20 (Multiplication par une fonction régulière ψ)

Soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ et $\psi \in C^\infty(\mathbb{R})$, la distribution ψT est définie par

$$\langle \psi T, \varphi \rangle := \langle T, \psi \varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$$

Exercice 17

Soit $\psi \in C^\infty(\mathbb{R})$ et la distribution δ_a définie par
$\langle \delta_a, \varphi \rangle = \varphi(a), \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$.

- *Montrer que*

$$\psi \delta_a = \psi(a)\delta_a.$$

- *En déduire une simplification des deux distributions suivantes*

$$T_1 = ((1+t)\cos(t) + \sin(t))\,\delta \quad \text{et} \quad T_2 = \left(t\cos(t) + t^2 \sin(t)\right)\delta_{\frac{\pi}{2}}$$

Dérivée d'une distribution

Remarque

Si f est une fonction régulière telle que $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ et $f' \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ alors on souhaiterait vérifier que $T'_{\{f\}} = T_{\{f'\}}$. cette égalité implique en particulier que

$$\langle T'_{\{f\}}, \varphi \rangle = -\langle T_{\{f\}}, \varphi' \rangle = -\int_{\mathbb{R}} f(t)\varphi'(t)dt = \int_{\mathbb{R}} f'(t)\varphi(t)dt = \langle T_{\{f'\}}, \varphi \rangle$$

Définition 21

Soit T une distribution. La dérivée de la distribution T au sens des distributions est la distribution notée T' définie par

$$\langle T', \varphi \rangle := -\langle T, \varphi' \rangle, \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$$

Exercice 18

Soit U la fonction échelon, montrer que $T'_{\{U\}} = \delta$.

Exercice 19

Soit $\psi \in C^\infty(\mathbb{R})$ et soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

- *Montrer que*
$$(\psi T)' = \psi' T + \psi T'.$$
- *Dans le cas où $T = \delta_a$, montrer que*
$$\psi \delta_a' = \psi(a)\delta_a' - \psi'(a)\delta_a.$$
- *En déduire des expressions simplifiées des deux distributions suivantes*

$$T_1 = ((1+t)\cos(t) + \sin(t))\,\delta' \quad \text{et} \quad T_2 = \left(t\cos(t) + t^2\sin(t)\right)\delta'_{\frac{\pi}{2}}.$$

Exercice 20

On considère la fonction f définie par

$$f(t) = \begin{cases} \sqrt{t} + 2 & si \quad t > 0 \\ t^2 & sinon \end{cases}.$$

La fonction f est-elle dérivable (au sens des fonctions) ? Soit $T_{\{f\}}$ la distribution régulière associée. Déterminer la dérivée de $T_{\{f\}}$.

Propriété 9 (Théorème des sauts)

Soit f une fonction de classe C^1 par morceaux sur R, admettant des discontinuités en les points $a_1, \cdots, a_p$. Soit σ_i le saut en a_i, c'est-à-dire que $\sigma_i = \lim_{x \to a_i^+} f(x) - \lim_{x \to a_i^-} f(x)$. Alors

$$T'_{\{f\}} = T_{\{f'\}} + \sum_i \sigma_i \delta_{a_i}$$

Limite de Distributions

Définition 22

Soit $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de distributions. On dit que T_n converge vers la distribution T aux sens des distributions si

$$\lim_{n\to\infty} \langle T_n, \varphi\rangle = \langle T, \varphi\rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}).$$

Exercice 21

Déterminer les limites des suites de distributions suivantes :

$$T_{1,n} = \delta_n \text{ et } T_{2,n} = \delta_{1/n}$$

Exercice 22

Soient les fonctions $f : t \mapsto \chi_{[-1/2,1/2]}$ et $f_n : t \mapsto nf(nt)$.

- *Tracer les fonctions f_n pour différentes valeurs de n*
- *Montrer que la suite de distributions $T_n = T_{\{f_n\}}$ converge vers la distribution Dirac δ.*

Résolution d'équation dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$

A noter que l'ensemble des définitions précédentes permettent de généraliser assez facilement les opérations classiques sur les fonctions. La contrepartie est que la résolution d'équation au sens des distributions devient délicat.

Exercice 23

On souhaite résoudre l'équation $tT = 0$ au sens des distributions.Soit $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ telle que $\psi(0) = 1$.

- *Montrer que pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, la fonction*

$$\tilde{\varphi} : t \mapsto \frac{\varphi(t) - \varphi(0)\psi(t)}{t}$$

  est continue en zéro.
  On admet par la suite que $\tilde{\varphi} \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$.
- *Montrer $T = C_\psi \delta$ où on donnera l'expression de C_ψ en fonction de ψ*
- *Montrer que C_ψ ne dépend pas du choix de ψ.*

Transformée de Fourier de distribution

Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ et $f \in L^1(\mathbb{R})$, on rappelle que

- Transformée de fourier

$$\hat{\varphi}(t) = \mathcal{F}[\varphi](t) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) e^{-2i\pi xt} dx$$

- Transformée de fourier inverse

$$\varphi(x) = \mathcal{F}^{-1}[\hat{\varphi}](x) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(t) e^{+2i\pi xt} dx$$

- Formule de Parseval

$$\int f(x)\hat{\varphi}(x)dx = \int \int f(x)\varphi(t)e^{-2i\pi xt} dxdt = \int \hat{f}(t)\varphi(t)dt$$

Transformée de Fourier de distribution

Définition 23

Soit T une distribution. La transformée de Fourier de T est la distribution notée $\mathcal{F}[T]$ définie par

$$\langle \mathcal{F}[T], \varphi \rangle := \langle T, \hat{\varphi} \rangle, \quad \forall \varphi \in ?$$

où $\hat{\varphi}$ est la tranformée de Fourier de φ aux sens des fonctions.

Exemple

Avec

$$\langle \mathcal{F}[T_{\{1\}}], \varphi \rangle = \langle T_{\{1\}}, \hat{\varphi} \rangle = \int_{\mathbb{R}} \hat{\varphi}(t) dt = \varphi(0) = \langle \delta, \varphi \rangle,$$

on en déduit que $\mathcal{F}[T_{\{1\}}] = \delta$.

Problème : Si $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, $\hat{\varphi}$ n'est pas à support compact et ne peut être inclu dans $\mathcal{D}(\mathbb{R})$.

Exercice 24

Déterminer les transformées de Fourier des distributions

$$T_1 = \delta, \quad T_2 = \delta^{(k)}, \quad T_3 = T_{\{e^{2i\pi f_0 t}\}}, \quad T_4 = T_{\{cos(2\pi f_0 t)\}}, \quad T_5 = T_{\{sin(2\pi f_0 t)\}},$$

où $f_0 \in \mathbb{R}$.

Espace de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R})$

Définition 24

On note l'ensemble des fonctions tests noté $\mathcal{S}(\mathbb{R})$:

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}) = \left\{ \varphi \in C^\infty(\mathbb{R}); \forall (m,p) \in \mathbb{N}^2, \lim_{x \to \pm\infty} |x^p \varphi^{(m)}(x)| = 0. \right\}$$

Exemple de fonction test : soit $\rho \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ définie par

$$\rho(t) = e^{-\pi t^2}$$

Définition 25 (Notion de convergence dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$)

On dit que $\varphi_n \to \varphi$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ si :

$$\lim_{n \to \infty} \sup_{x \in \mathbb{R}} \left\{ |x|^k |\varphi_n^{(m)} - \varphi^{(m)}| \right\} = 0, \quad \forall (m,k) \in \mathbb{N}^2.$$

Ensemble de distributions tempérées $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$

Définition 26 (d'une distribution tempérée)

Un distribution tempérée T est une application

$$\begin{aligned} T : \mathcal{D}(\mathbb{R}) &\mapsto \mathbb{R} \\ \varphi &\mapsto T[\varphi] = \langle T, \varphi \rangle \end{aligned}$$

qui est linéaire et continue. C'est à dire

$$\langle T, \lambda\varphi + \psi \rangle = \lambda \langle T, \varphi \rangle + \langle T, \psi \rangle, \quad \textit{et}$$

$$\lim_{k \to \infty} \langle T, \varphi_k \rangle = 0 \quad \textit{si } \varphi_k \to 0 \textit{ dans } \mathcal{S}(\mathbb{R}).$$

Notion de distibutions tempérées régulières

Définition 27 (distribution tempérée régulière)

Une distribution tempérée T est dite régulière si il existe une fonction $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ à croissance lente telle que

$$\langle T, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(t)\varphi(t)dt, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}).$$

On notera par la suite $T_{\{f\}}$ la distribution régulière associée à la fonction $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$.

Une fonction $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ est à croissance lente si $\forall m \in \mathbb{N}$, il existe une constante $C \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{N}$ tels que

$$|f^{(m)}(x)| \leq C|1 + |x||^k.$$

Exercice 25

Montrer qu'une distribution régulière tempérée est bien une distribution tempérée.

Exercice 26

L'application $T_{\{exp(x^2)\}}$ est-elle une distribution ? Une distribution tempérée ? $T_{\{x^2\}}$ est-elle une distribution ? une distribution tempérée ?
Montrer que $T_1 = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \delta_n$ est une distribution tempérée.

Exercice 27

Soit T une distribution et soit $a \in \mathbb{R}$, on note $D_a T$ la dilaté de T d'un facteur a et définie par $\langle D_a T, \varphi(x) \rangle := \langle T, \frac{1}{|a|}\varphi(x/a) \rangle$. Montrer que

$$\mathcal{F}[D_a T] = \frac{1}{|a|} D_{1/a} \mathcal{F}[T].$$

Exercice 28

Résoudre l'équation $T' = 0$.
Astuce : Appliquer la transformée de Fourier à l'équation et utiliser le résultat de l'exercice sur la résolution de $xT = 0$

Exercice 29

Soit la distribution $\Delta_P = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \delta_{nP}$. On souhaite montrer que $\mathcal{F}[\Delta_P] = \frac{1}{P} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \delta_{n/P}$.

(a) *Développer en série de Fourier la fonction P-périodique définie sur $[0, P]$ par $f(t) = t - P/2$.*

(b) *Etudier la convergence de cette série de Fourier*

(c) *Nous admettons par la suite que la série de Fourier converge vers $T_{\{f\}}$ au sens des distributions tempérées. Calculer les dérivées de $T_{\{f\}}$ et de la distribution associée à la série de Fourier de f.*

(d) *En déduire le résultat souhaité.*