MA1-Analyse numérique

E. Bretin, C. Reichert et Sophie Thery

August 21, 2025

INSA INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES LYON

Pole Math

Plan du cours

1. Résolution de systèmes linéaires
2. Résolution d'équations non-linéaires
3. Résolution d'équations différentielles ordinaires
4. Résolution d'équations aux dérivées partielles

Résolution de systèmes linéaires

1. Résolution de systèmes linéaires
   - Méthodes directes: factorisation LU et Cholesky
   - Méthodes itératives: point fixe et méthode Jacobi, Gauss-Seidel
   - Conditionnement et erreur numérique
2. Résolution d'équations non-linéaires
3. Résolution d'équations différentielles ordinaires
4. Résolution d'équations aux dérivées partielles

Ce chapitre s'intéresse à différentes méthodes numériques pour la résolution de systèmes linéaires

$$Ax = b.$$

Motivations : La plupart des méthodes numériques conduisent à la résolution d'un système linéaire qui représente en général, la tache la plus coûteuse d'un point de vue algorithmique !

2 types de méthodes :

- Méthodes directes : factorisation de la matrice A et résolution exacte du système linéaire.
- Méthodes itératives : résolution approchée du système linéaire

Coût algorithmique : (à l'exception de matrices particulières) $O(n^3)$

Cas simples

Matrices diagonales

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{n,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} x_1 = b_1/a_{1,1} \\ x_i = b_i/a_{i,i} \\ x_n = b_n/a_{n,n} \end{cases}$$

Coût algorithmique -¿ $O(n)$

Matrices triangulaires

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ 0 & a_{2,2} & & a_{2,n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} x_n = \frac{b_n}{a_n} \\ x_{n-1} = \frac{b_{n-1} - a_{n-1,n} x_n}{a_{n-1,n-1}} \\ x_k = \frac{b_k - \sum_{j=k+1}^{n} a_{k,j} x_j}{a_{k,k}} \end{cases}$$

Coût algorithmique -¿ $O(n^2)$

INSA INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES LYON

Pole Math

Résolution de systèmes linéaires

1. Résolution de systèmes linéaires
   - Méthodes directes: factorisation LU et Cholesky
   - Méthodes itératives: point fixe et méthode Jacobi, Gauss-Seidel
   - Conditionnement et erreur numérique
2. Résolution d'équations non-linéaires
3. Résolution d'équations différentielles ordinaires
4. Résolution d'équations aux dérivées partielles

Décomposition LU : idée générale

La décomposition LU consiste à factoriser A sous la forme

$$PA = LU,$$

avec

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ l_{2,1} & 1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ l_{n,1} & \cdots & l_{n-1,n} & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad U = \begin{pmatrix} u_{1,1} & u_{1,2} & \cdots & u_{1,n} \\ 0 & u_{2,2} & & u_{2,n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & u_{n,n} \end{pmatrix}$$

et P, une matrice de permutation (en particulier $P^t = P^{-1}$).

Motivation : La résolution du système $Ax = b$ s'effectue en 2 étapes :

$$LUx = P^t b \Longrightarrow \begin{cases} Ly = P^t b \\ Ux = y \end{cases}$$

INSA INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES LYON

Pole Math

Décomposition de Cholesky

La décomposition de Cholesky consiste à factoriser A sous la forme $A = LL^t$, où

$$L = \begin{pmatrix} l_{1,1} & 0 & \cdots & 0 \\ l_{2,1} & l_{2,2} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ l_{n,1} & \cdots & l_{n-1,n} & l_{n,n} \end{pmatrix}$$

Motivation : Comme pour la décomposition LU, la résolution du système $Ax = b$ s'effectue en 2 étapes :

$$LL^t\, x = b \Longrightarrow \begin{cases} Ly = b \\ L^t x = y \end{cases},$$

L'avantage par rapport à la factorisation LU est

- de n'avoir qu'une seule matrice à stocker
- de présenter un algorithme 2 fois plus rapide !

INSA INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES LYON

Pole Math

Definition 1

Une matrice A est définie positive si

$$< x, Ax > \geq 0 \quad \text{et} \quad < x, Ax >= 0 \Longrightarrow x = 0.$$

Un exemple de telles matrices sont les matrices à diagonale strictement dominante !

Théorème 2

Si A est une matrice symétrique définie positive, alors il existe une unique matrice L triangulaire inférieure avec coefficients diagonaux positifs telle que

$$A = LL^t.$$

INSA INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES LYON
Pole Math

Exemple en dimension 2 :

Soit $A = \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix}$ une matrice définie positive.

En particulier, l'hypothèse de positivité implique que

$$\begin{cases} a =< e_1, Ae_1 > \quad > 0 \\ ab - c^2 = det(A) > 0 \end{cases}$$

Avec

$$L = \begin{pmatrix} l_{1,1} & 0 \\ l_{2,1} & l_{2,2} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad LL^t = \begin{pmatrix} l_{1,1}^2 & l_{1,1}l_{2,1} \\ l_{2,1}l_{1,1} & l_{1,1}^2 + l_{2,2}^2 \end{pmatrix}.$$

On en déduit que

$$\begin{cases} l_{1,1} & = \sqrt{a} \\ l_{2,1} & = \frac{c}{\sqrt{a}} \\ l_{2,2} & = \sqrt{b - \frac{c^2}{a}} \end{cases}$$

INSA INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES LYON
Pole Math

Algorithme (Décomposition de Cholesky)

For $k = 1 : n$

$$\ell_{k,k} = \sqrt{a_{k,k} - \sum_{j=1}^{k-1} \ell_{k,j}^2}$$

For $i = k + 1 : n$

$$\ell_{i,k} = \left(a_{k,i} - \sum_{j=1}^{k-1} \ell_{k,j}\ell_{i,j}\right) / \ell_{k,k}$$

End

End

Exercice 1

Calculer le coût algorithmique de la décomposition de Cholesky

INSA INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES LYON
Pole Math

Exercice 2

Appliquer l'algorithme de Cholesky pour factoriser la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

INSA INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES LYON
Pole Math

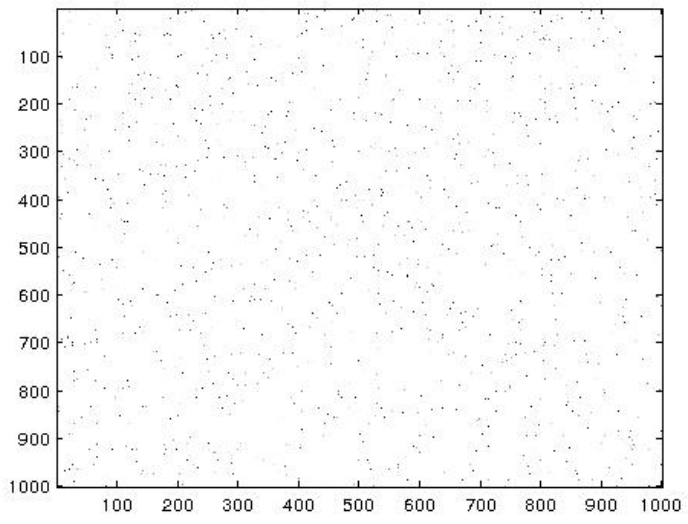
Résolution de systèmes linéaires

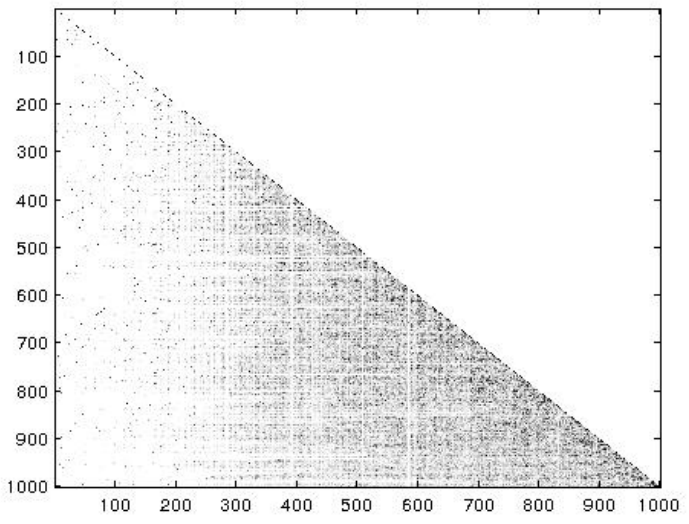
1. Résolution de systèmes linéaires
   - Méthodes directes: factorisation LU et Cholesky
   - Méthodes itératives: point fixe et méthode Jacobi, Gauss-Seidel
   - Conditionnement et erreur numérique
2. Résolution d'équations non-linéaires
3. Résolution d'équations différentielles ordinaires
4. Résolution d'équations aux dérivées partielles

Méthode itératives classiques

Motivations :

- Le coût de la résolution des méthodes directes est en $O(n^3)$!
- Dans de nombreuses situations, les matrices A sont creuses (peu des coefficients non nuls) et la décomposition LU perd cette propriété $\rightarrow$ problème de place mémoire !





INSA INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES LYON

Pole Math

Algorithme du point fixe

Le principe est de rechercher la solution x^* du système linéaire

$$Ax = b,$$

comme le point fixe d'une application $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$:

$$\phi(x^*) = x^*.$$

L'algorithme du point fixe construit alors la suite x_k définie par

$$\begin{cases} x_0 \in \mathbb{R}^n \\ x_{k+1} = \phi(x_k) \end{cases}$$

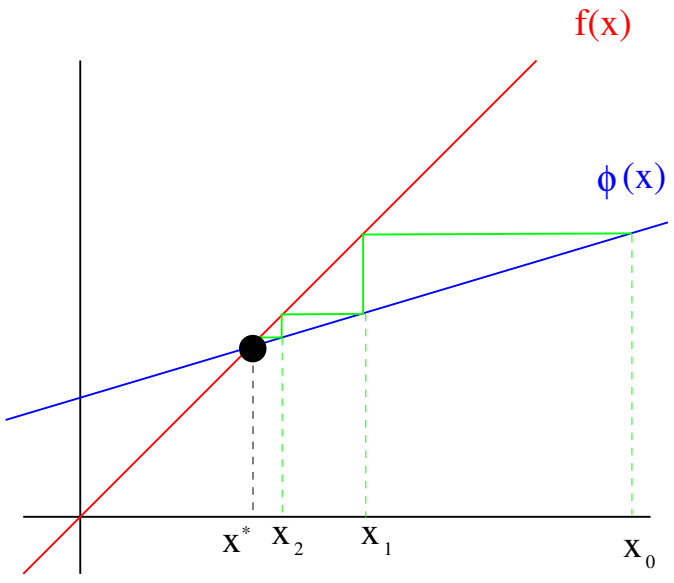
en espérant qu'avec de bonnes propriétés sur ϕ,

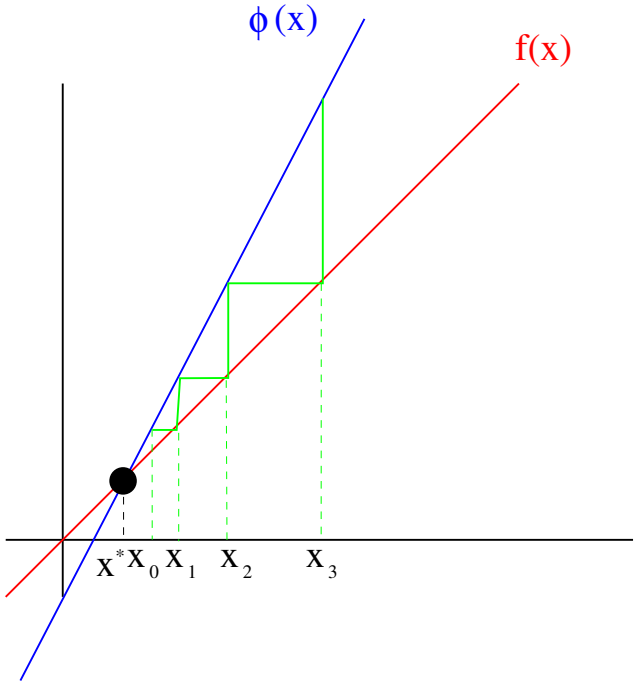
$$\lim_{k \to \infty} x_k = x^*$$

INSA INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES LYON
Pole Math

Exemple en dimension 1

Avec des fonctions ϕ de la forme $\phi(x) = ax - b$.





une condition nécessaire et suffisante pour que $x_k \to x^*$ est

$$|a| < 1$$

INSA INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES LYON

Pole Math

Contraction et existence de point fixe

Definition 3

Une application $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est une contraction pour la norme $\|.\|$ s'il existe $\lambda < 1$ tel que

$$\|\phi(x) - \phi(y)\| \leq \lambda \|x - y\|$$

Théorème 4

Si ϕ est une contraction, alors ϕ admet un unique point fixe noté x^*.

Démonstration :

- Existence : admise (suite de Cauchy)
- Unicité : si $x_1 = \phi(x_1)$ et $x_2 = \phi(x_2)$ alors

$$\begin{aligned} \|x_1 - x_2\| &= \|\phi(x_1) - \phi(x_2)\| \\ &\leq \lambda \|x_1 - x_2\| \\ &< \|x_1 - x_2\| \quad \text{si} \quad x_1 \neq x_2 \end{aligned}$$

INSA INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES LYON
Pole Math

Convergence de l'algorithme du point fixe

Théorème 5

Soit $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une contraction et $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Alors la suite x_k définie

$$\begin{cases} x_0 \in \mathbb{R}^n \\ x_{k+1} = \phi(x_k) \quad \forall k > 0 \end{cases}$$

converge vers l'unique point fixe de x^* et

1. Estimation a posteriori

$$\|x^* - x_k\| \leq \frac{1}{1-\lambda} \|x_k - x_{k+1}\|$$

2. Estimation a priori

$$\|x^* - x_k\| \leq \frac{\lambda^k}{1-\lambda} \|x_1 - x_0\|$$

Démonstration :

1. Il suffit de remarquer que

$$\begin{aligned}\|x^* - x_k\| &\leq \|x^* - x_{k+1} + x_{k+1} - x_k\| \leq \|x^* - x_{k+1}\| + \|x_{k+1} - x_k\| \\ &\leq \|\phi(x^*) - \phi(x_k)\| + \|x_{k+1} - x_k\| \\ &\leq \lambda\|x^* - x_k\| + \|x_{k+1} - x_k\|\end{aligned}$$

2. Avec l'inégalité (1), on a

$$\begin{aligned}\|x^* - x_k\| &\leq \frac{1}{1-\lambda}\|x_{k+1} - x_k\| \leq \frac{1}{1-\lambda}\|\phi(x_k) - \phi(x_{k-1})\| \\ &\leq \frac{\lambda}{1-\lambda}\|x_k - x_{k-1}\| \leq \frac{\lambda^k}{1-\lambda}\|x_1 - x_0\|\end{aligned}$$

INSA INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES LYON
Pole Math

Algorithme avec une précision ϵ

Algorithme (Méthode du Point fixe)

Donnée : $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $\epsilon > 0$

$x_1 = \phi(x_0)$, $k = 1$

While $\|x_k - x_{k-1}\| \geq c_\epsilon$

$x_{k+1} = \phi(x_k)$

End

Exercice 3

Comment choisir c_ϵ pour que l'algorithme s'arrête avec une précision de ϵ sur x^* ?

INSA INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES LYON
Pole Math

Application pour la résolution de système linéaire

On s'intéresse à des applications ϕ de la forme

$$\phi(x) = M^{-1}(Nx + b).$$

où $A = M - N$.

Exercice 4

Montrer que si x^* est un point fixe de ϕ alors

$$Ax^* = b$$

L'application ϕ est une contraction si

$$|||M^{-1}N||| < 1.$$

On remarque de plus que $x_{k+1} = \phi(x_k)$ est solution de système linéaire

$$Mx_{k+1} = Nx_k + b.$$

Idée : choisir M proche de A et facile à inverser !

INSA INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES LYON

Pole Math

Méthode de Jacobi

La méthode de Jacobi utilise

$$M = D, \quad N = -L - U.$$

Exercice 5

Montrer que

$$(x_{k+1})_i = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1, j\neq i}^{n} a_{i,j}(x_k)_j \right)$$

Théorème 6

Si A est à diagonale strictement dominante, alors la méthode de Jacobi converge

Démonstration : Avec $M^{-1}N = -D^{-1}(L+U)$, il ressort que

$$\|M^{-1}N\|_\infty = max_j \left(\sum_{i\neq j} \left| \frac{a_{i,j}}{a_{ii}} \right| \right) < 1$$

INSA INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES LYON

Pole Math

Méthode de Gauss-Seidel

La méthode de Gauss-Seidel utilise

$$M = D + L, \quad N = -U.$$

Exercice 6

Montrer que

$$(x_{k+1})_i = \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}(x_{k+1})_j - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}(x_k)_j\right) \tag{1}$$

Théorème 7

Si A est symétrique définie positive, alors la méthode de Gauss-Seidel converge

Démonstration : Admise (regarder la norme $|||M^{-1}N|||_2 < 1$)

INSA INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES LYON
Pole Math

Résolution de systèmes linéaires

1. Résolution de systèmes linéaires
   - Méthodes directes: factorisation LU et Cholesky
   - Méthodes itératives: point fixe et méthode Jacobi, Gauss-Seidel
   - Conditionnement et erreur numérique
2. Résolution d'équations non-linéaires
3. Résolution d'équations différentielles ordinaires
4. Résolution d'équations aux dérivées partielles

Conditionnement d'une matrice

Motivation : Il s'agit ici de comprendre comment une erreur δA sur la matrice A et une erreur δb sur le vecteur b influencent la solution x du système linéaire

$$Ax = b.$$

En particulier, en notant $x + \delta_x$ la solution de

$$(A + \delta A)(x + \delta_x) = b + \delta_b,$$

on souhaite contrôler l'erreur relative

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|}$$

INSA INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES LYON
Pole Math

Norme matricielle induites

Definition 8

Soit $\|.\|$ une norme sur $\mathbb{R}^n$. On note $|||.|||$ la norme induite sur l'espace vectoriel des matrices carrées de taille $(n \times n)$ définie par

$$|||A||| = \max_{\|x\| \leq 1} \|Ax\|$$

Exemples :

$$\begin{cases} |||A|||_2 = \sqrt{\lambda_{\max}} \\ |||A|||_1 = \max_j \sum_{i=1}^n |a_{ij}| \\ |||A|||_\infty = \max_i \sum_{j=1}^n |a_{ij}|, \end{cases}$$

où $\lambda_{\max}$ est la plus grande valeur propre de $A^t A$.

INSA INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES LYON
Pole Math

Conditionnement

Definition 9

Soit $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ une matrice inversible. Le conditionnement de A par rapport à une norme donnnée $\|.\|$ est défini par

$$cond(A) = |||A||| \; |||A^{-1}|||$$

Exercice 7

Calculer le conditionnement par rapport à la norme $\|.\|_\infty$ de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1.2969 & 0.8648 \\ 0.2161 & 0.1441 \end{pmatrix}$$

INSA INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES LYON
Pole Math

Théorème 10

Soit x et $x + \delta x$ les solutions des systèmes linéaires

$$\begin{cases} Ax = b \\ (A + \delta A)(x + \delta x) = b + \delta b \end{cases}$$

Alors

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leq \frac{cond(A)}{(1 - |||A||| \, |||\delta A|||)} \left(\frac{\|\delta b\|}{\|b\|} + \frac{\|\delta A\|}{\|A\|} \right)$$

Preuve, cas $\delta A = 0$:

Il suffit de remarquer que

$$Ax = b \Longrightarrow \|b\| \leq |||A||| \, \|x\| \Longrightarrow \frac{1}{\|x\|} \leq \frac{|||A|||}{\|b\|}$$

et

$$A\delta x = \delta b \Longrightarrow \|\delta_x\| \leq |||A^{-1}||| \, \|\delta_b\|$$

INSA INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES LYON

Pole Math

Résolution d'équations non-linéaires

1. Résolution de systèmes linéaires
2. Résolution d'équations non-linéaires
   - Méthode de la Dichotomie
   - Méthode du point fixe
   - Méthode de Newton
3. Résolution d'équations différentielles ordinaires
4. Résolution d'équations aux dérivées partielles

Ce chapitre s'intéresse aux méthodes numériques pour la résolution d'équations non linéaires de la forme

$$f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x_1, \ldots, x_n) \\ \vdots \\ f_n(x_1, \ldots, x_n) \end{pmatrix} = 0$$

Exemples :

- Calcul de la racine carré $\sqrt{a}$: Premier algorithme, Babyloniens
- Méthode des Moindres carrés non linéaires : Trouver la fonction de la forme

  $$g(\alpha, \beta, x) = \alpha x^{\beta}$$

  qui minimise l'énergie

  $$\phi(\alpha, \beta) = \sum_{i=1}^{n} \left(y_i - \alpha x_i^{\beta} \right)^2$$

  La solution s'obtient en résolvant

  $$\nabla \phi = 0.$$

INSA INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES LYON
Pole Math

Résolution d'équations non-linéaires

1. Résolution de systèmes linéaires
2. Résolution d'équations non-linéaires
   - Méthode de la Dichotomie
   - Méthode du point fixe
   - Méthode de Newton
3. Résolution d'équations différentielles ordinaires
4. Résolution d'équations aux dérivées partielles

Méthode de la Dichotomie

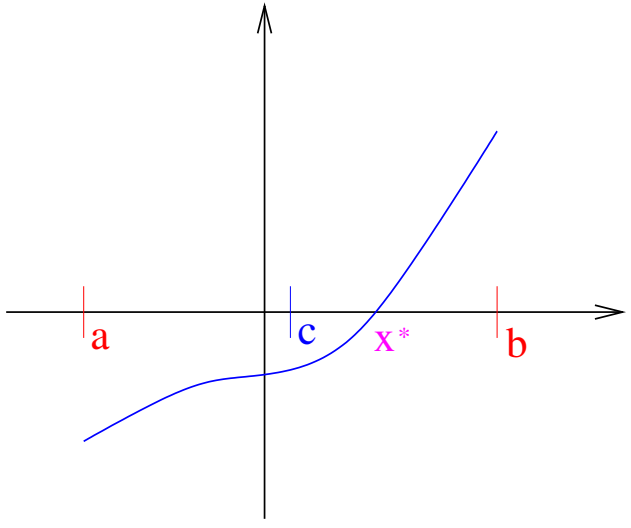
Hypothèses

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, continue telle que $f(a)f(b) < 0$

Principe

On regarde la fonction f au milieu de [a,b], $c = (a + b)/2$,

$$\begin{cases} \text{Si } f(a)f(c) < 0 \implies \exists x^* \in [a, c] \\ \text{Si } f(a)f(c) > 0 \implies \exists x^* \in [c, b] \end{cases}$$



INSA INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES LYON

Pole Math

Algorithme (Méthode de la dichotomie)

Donnée : $a_a = a$, $b_0 = b$, $x_0 = (a+b)/2$ et $\epsilon > 0$

For $k = 0 : N_\epsilon$

If $f(x_k)f(a_k) < 0$

$a_{k+1} = a_k$

$b_{k+1} = x_k$

else

$a_{k+1} = x_k$

$b_{k+1} = b_k$

end

$x_{k+1} = (a_{k+1} + b_{k+1})/2$

End

INSA INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES LYON

Pole Math

Exercice 8

Avec $l_k = b_k - a_k$, montrer que

$$l_k = \frac{b-a}{2^k}.$$

En déduire que le nombre d'itérations N_ϵ nécessaire à l'algorithme pour obtenir une précision de ϵ sur la solution vérifie

$$N_\epsilon \geq \frac{\ln((b-a)/\epsilon)}{ln(2)}$$

Exercice 9

Application pour l'estimation de $\sqrt{2}$ à une précision de 10^{-2} avec $f(x) = x^2 - 2$.

Limite de l'approche de la Dichotomie

- Cas pathologiques !
- Vitesse de convergence linéaire.
- Extension en dimension supérieure ?

Résolution d'équations non-linéaires

1. Résolution de systèmes linéaires
2. Résolution d'équations non-linéaires
   - Méthode de la Dichotomie
   - Méthode du point fixe
   - Méthode de Newton
3. Résolution d'équations différentielles ordinaires
4. Résolution d'équations aux dérivées partielles

Méthode du point fixe

Principe :

Transformer le problème $f(x) = 0$ en un problème équivalent de la forme $g(x) = x$.

Exemple pour le calcul d'une racine carré $\sqrt{a}$:

Cette racine peut s'obtenir en résolvant $f(x) = x^2 - a = 0$, ou encore en regardant les points fixes des fonctions g suivantes

$$\begin{cases} g_1(x) = a/x \\ g_2(x) = x^2 + x - a \\ g_3(x) = (1 - 1/m)x + a/(mx), \end{cases}$$

Question : Comment choisir une fonction g optimale ?

INSA INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES LYON

Pole Math

Méthode du point fixe

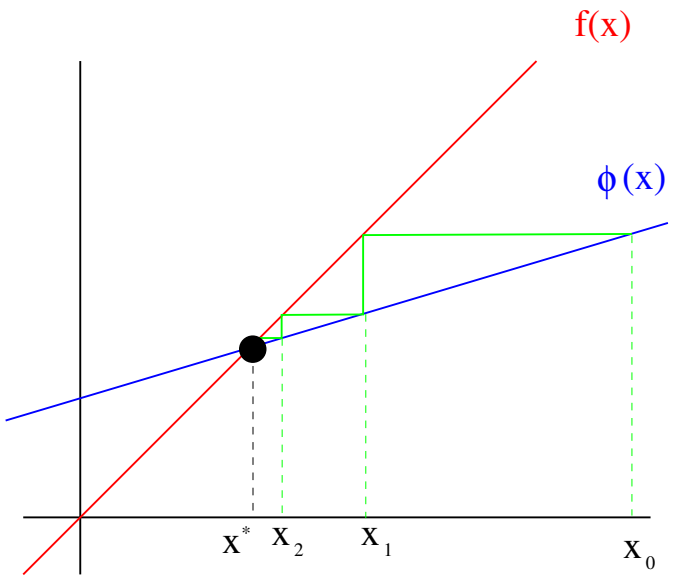
Algorithme (Méthode du Point fixe)

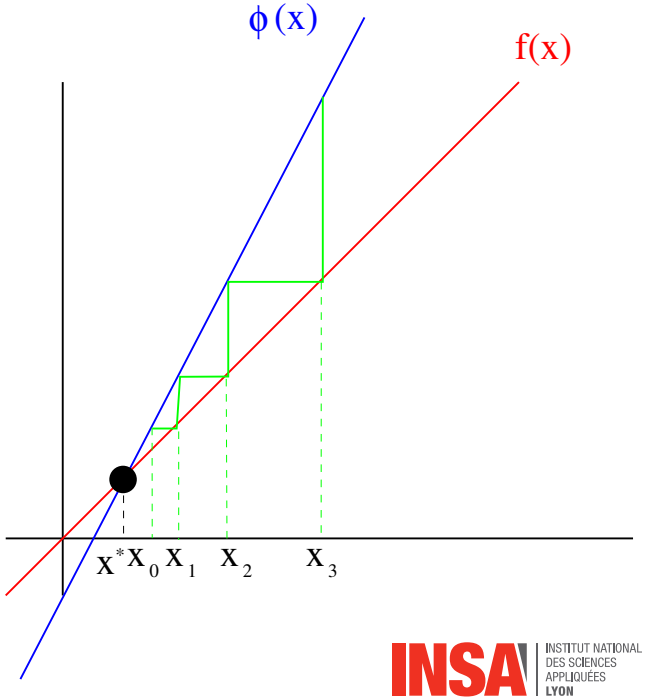
Donnée : $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $\epsilon > 0$

for $k = 0 : N_\epsilon$

$$x_{k+1} = g(x_k)$$

End





INSA INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES LYON

Pole Math

Théorème 11 (Version globale en dimension 1)

Soit $g : [a, b] \to [a, b]$ de régularité $C^1([a, b])$ telle que

$$|g'(x)| \leq \lambda < 1, \quad \forall x \in [a, b].$$

Alors g possède un unique point fixe $x^* \in [a, b]$ et $x_k \to x^*$ lorsque $k \to \infty$. Plus précisément,

1. Estimation a posteriori

$$\|x^* - x_k\| \leq \frac{1}{1-\lambda} \|x_k - x_{k+1}\|$$

2. Estimation a priori

$$\|x^* - x_k\| \leq \frac{\lambda^k}{1-\lambda} \|x_1 - x_0\|$$

INSA INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES LYON
Pole Math

Démonstration :

Existence : Avec $h(x) = g(x) - x$, remarquer que $h(a)h(b) \leq 0$

Unicité : Avec $x_1 = g(x_1)$ et $x_2 = g(x_2)$, remarquer que

$$|x_1 - x_2| = |g(x_1) - g(x_2)| \leq \int_{x_1}^{x_2} |g'(x)|dx \leq \lambda |x_1 - x_2|$$

Vitesse de convergence : voir cours résolution systèmes linéaires.

Exercice 10

Montrer que le nombre d'itérations N_ϵ permettant à l'algorithme d'obtenir un précision de l'ordre de ϵ sur la solution x^* du problème vérifie

$$N_\epsilon \geq \frac{ln\left(\frac{(1-\lambda)\epsilon}{\|x_1 - x_0\|}\right)}{ln(\lambda)}$$

Théorème 12 (Version locale en dimension 1)

Soit x^* un point fixe d'une fonction g de régularité C^1 au voisinage de x^* telle que

$$|g'(x^*)| < 1.$$

Alors il existe un réel $\alpha > 0$ tel que $\forall x_0 \in [x^* - \alpha, x^* + \alpha]$, l'algorithme du point fixe converge vers le point fixe x^*

Démonstration :

Appliquer le théorème global sur l'intervalle $I_\alpha = [x^* - \alpha, x^* + \alpha]$ avec α suffisamment petit.

Cas de plusieurs points fixes

Definition 13

Un point fixe x^* d'une fonction g est dit

$$\begin{cases} \text{attractif} & \text{si} \quad |g_1'(x^*)| < 1 \\ \text{répulsif} & \text{si} \quad |g_1'(x^*)| > 1 \end{cases}$$

Definition 14

Le bassin d'attraction d'un point fixe x^* est l'ensemble des valeurs initiales x_0 pour lesquelles x_k tend vers x^* lorsque k tend vers l'infini

Exercice 11

Etudier le bassin d'attraction des points fixes de

$$g(x) = x + (x^2 - 1)x.$$

Vitesse de convergence

Le taux de convergence est donné par $|g'(x^*)|$.

$$\begin{cases} \text{si } |g'(x^*)| > 1 & \Longrightarrow \quad \text{l'algorithme diverge} \\ \text{si } |g'(x^*)| < 1 \text{ et } g'(x^*) \neq 0 & \Longrightarrow \quad \text{convergence linéaire} \\ \text{si } |g'(x^*)| = 0 & \Longrightarrow \quad \text{convergence quadratique} \end{cases}$$

Exercice 12 (Cas où $f(x) = x^2 - a$)

Etudier la convergence de l'algorithme du point fixe dans le cas des fonctions suivantes

$$\begin{cases} g_1(x) = a/x \\ g_2(x) = x^2 + x - a \\ g_3(x) = (1 - 1/m)x + a/(mx) \end{cases}$$

Déterminer une approximation de $\sqrt{2}$.

Méthode du point fixe en dimension supérieure

Théorème 15 (Version globale)

On introduit

$$B(x,R) = \left\{ y \in \mathbb{R}^n \,;\ \|y - x\| \leq R \right\},$$

Soit $g : B(\overline{x},R) \to B(\overline{x},R)$ est une contraction, i.e. $\exists \lambda < 1$ tel que

$$\|g(x) - g(y)\| \leq \lambda \|x - y\|, \quad \forall (x,y) \in B(x,R).$$

Alors g admet un point fixe $x^* \in B(\overline{x},R)$ et $x_k \to x^*$

Théorème 16 (Version locale)

Soit $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ de régularité C^1 au voisinage d'un point fixe x^* de g. Si $\|Dg(x^*)\| < 1$, alors il existe un réel $\alpha > 0$ tel que $\forall x_0 \in B(x^*,\alpha)$, l'algorithme du point fixe converge vers x^*.

INSA INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES LYON
Ole Math

Exercice 13

- Déterminer les solutions de

$$F(X) = \begin{pmatrix} x_1^2 + x_2^2 - 2 \\ x_1^2 - x_2^2 \end{pmatrix} = 0.$$

- Montrer que ces solutions s'obtiennent aussi comme les points fixes de l'application

$$G(X) = \begin{pmatrix} (1 - 1/m)x_1 + \frac{2 - x_2^2}{m x_1} \\ (1 - 1/m)x_2 + \frac{x_1^2}{m x_2} \end{pmatrix}$$

- Etudier la convergence de l'algorithme du point fixe dans le cas où $m = 4$.

INSA INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES LYON
Pole Math

Résolution d'équations non-linéaires

1. Résolution de systèmes linéaires
2. Résolution d'équations non-linéaires
   - Méthode de la Dichotomie
   - Méthode du point fixe
   - Méthode de Newton
3. Résolution d'équations différentielles ordinaires
4. Résolution d'équations aux dérivées partielles

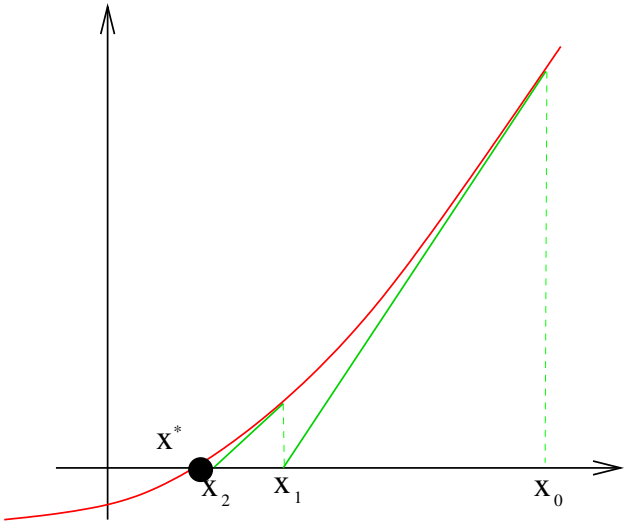
Méthode de Newton : cas dimension 1

Principe

Approcher la fonction f par sa tangente en $(x_0, f(x_0))$:

1) $p(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$
2) Résoudre $p(x) = 0$:

$$\Longrightarrow x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$



Algorithme (Méthode du Point fixe)

Donnée : $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $\epsilon > 0$, $x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$

While $\|x_{k+1} - x_k\| \leq \epsilon/2$,

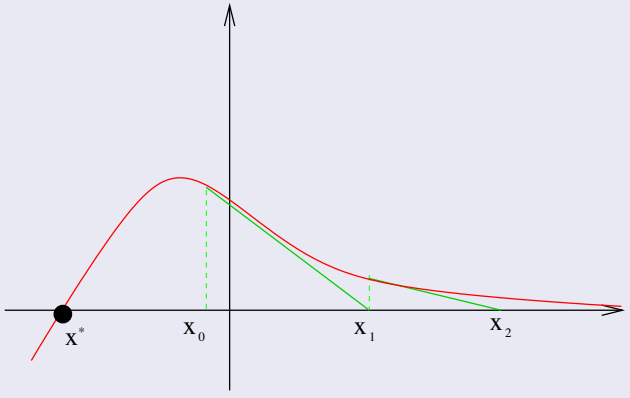
$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$

End

Méthode de Newton : cas dimension 1

Remarque 17

Choisir x_0 suffisamment proche de x^*



Remarque 18

Il s'agit d'une méthode de point fixe avec

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

En effet, si $f'(x^*) \neq 0$ alors "$g(x) = x \iff f(x) = 0$".

Théorème 19 (Cas de zéro simple)

Soit $f \in C^2([a,b])$ et $x^* \in [a,b]$ tel que

$$\begin{cases} f(x^*) = 0 \\ f'(x^*) \neq 0, \end{cases}$$

Alors il existe $\alpha > 0$ tel que $\forall x_0 \in I_\alpha = [x^* - \alpha, x^* + \alpha]$, l'algorithme de Newton converge vers x^*.
Sa vitesse de convergence est de plus quadratique :

$$|x_{k+1} - x^*| \leq \frac{M}{2}|x_k - x^*|^2, \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

où $M = \dfrac{\sup_{x \in I_\alpha} \{|f''(x)|\}}{\inf_{x \in I_\alpha} \{|f'(x)|\}}$.

INSA INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES LYON
Pole Math

Démonstration :

Idée : appliquer le théorème de convergence du point fixe local à la fonction $g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$.

- Régularité de g : f étant C^2 et $f'(x^*) \neq 0$, il existe un voisinage $I_\alpha = [x^* - \alpha, x^* + \alpha]$ tel que $g \in C^1(I_\alpha)$.
- Valeur de $g'(x^*)$: en remarquant que

$$g'(x) = 1 - \frac{f'(x)^2 - f(x)f''(x)}{f'(x)^2} = \frac{f(x)f''(x)}{f'(x)^2},$$

on en déduit que $|g'(x^*)| = 0$.

- Vitesse de convergence : La formule de Taylor montre que

$$0 = f(x^*) = f(x_k) - f'(x_k)(x^* - x_k) + \frac{1}{2}f''(\xi)(x^* - x_k)^2, \qquad \text{avec } \xi \in [x_k, x$$

et

$$x_{k+1} - x^* = (x_k - x^*) - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} = \frac{1}{2}\frac{f''(\xi)}{f'(x_k)}(x^* - x_k)^2$$

INSA INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES LYON
Pole Math

Exercice 14

Ecrire l'algorithme de Newton dans le cas de la fonction $f(x) = x^2 - 2$ et calculer une approximation de $\sqrt{2}$.

Exercice 15

Ecrire l'algorithme de Newton dans le cas de la fonction $f(x) = exp(x) - 1$. Vérifier que la vitesse de convergence au voisinage de zéro est bien quadratique.

Exercice 16

Même exercice pour la fonction $f(x) = sin(x)^2$. La vitesse de convergence au voisinage de zéro est-elle quadratique ? Pourquoi ?

Méthode de Newton : Cas de racines multiples

Hypothèses : $f(x) = (x - x^*)^m h(x)$ avec $m > 1$ et h suffisamment régulière.

Exercice 17

Montrer que l'algorithme de Newton converge mais que sa vitesse de convergence est seulement linéaire.

Exercice 18

En appliquant l'algorithme de Newton à la fonction $\tilde{f}(x) = f(x)^{1/m}$, montrer que la variante de l'algorithme de Newton

$$x_{k+1} = x_k - m\frac{f(x_k)}{f'(x_k)},$$

admet cette fois-ci une vitesse de convergence quadratique.
Application dans le cas de la fonction $f(x) = sin(x)^2$.

Algorithme de Newton, cas dimension supérieure

Hypothèse : Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ de régularité C^2.
Principe : Le développement de Taylor montre que

$$f(x) = f(x_0) + Df(x_0)(x - x_0) + O(\|x - x_0\|^2)$$

où

$$Df(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

Algorithme (Algorithme de Newton)

Donnée : $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $\epsilon > 0$, $x_1 = x_0 - Df^{-1}(x_0)f(x_0)$
While $\|x_{k+1} - x_k\| \leq \epsilon/2$,
$x_{k+1} = x_k - Df^{-1}(x_k)f(x_k)$
End

Théorème 20

Soit $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ de régularité C^2 et x^* un point fixe de f tel que $Df(x^*)$ soit inversible. Alors il existe un réel $\alpha > 0$ tel que $\forall x_0 \in B(x^*, \alpha)$, l'algorithme de Newton converge vers x^*. Sa vitesse de convergence est de plus quadratique.

Exercice 19

Déterminer les solutions de

$$F(X) = \begin{pmatrix} x_1^2 + x_2^2 - 2 \\ x_1^2 - x_2^2 \end{pmatrix} = 0,$$

puis calculer 2 itérations de l'algorithme de Newton en partant de

$$X_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Exemple : Méthode des Moindres carrés non linéaires

On cherche la fonction de la forme

$$g(\alpha, \beta, x) = \alpha x^{\beta}$$

qui minimise l'énergie

$$\phi(\alpha, \beta) = \sum_{i=1}^{n} \left(y_i - \alpha x_i^{\beta} \right)^2 .$$

Exercice 20

- Montrer que les coefficients optimaux (α, β) vérifient

$$F(\alpha, \beta) = \begin{pmatrix} \alpha \sum_{i=1}^{n} (x_i^{\beta})^2 - \sum_{i=1}^{n} y_i x_i^{\beta} \\ \alpha^2 \sum_{i=1}^{n} ln(x_i)(x_i^{\beta})^2 - \alpha \sum_{i=1}^{n} y_i x_i^{\beta} ln(x_i) \end{pmatrix} = 0,$$

- Expliciter l'algorithme de Newton pour déterminer les coefficients (α, β).

Résolution d'équations différentielles ordinaires

1. Résolution de systèmes linéaires
2. Résolution d'équations non-linéaires
3. Résolution d'équations différentielles ordinaires
   - Analyse mathématiques des solutions
   - Discrétisation numérique des EDOs
4. Résolution d'équations aux dérivées partielles

Motivation

On s'intéresse à la résolution numérique et aux propriétés qualitatives des solutions d'équations différentielles ordinaires (EDO)

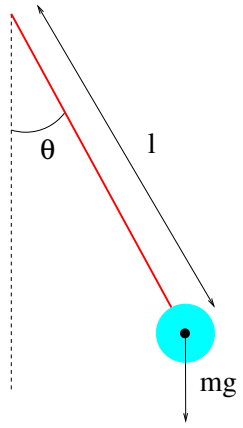
$$\begin{cases} y'(t) = f(y(t), t) \\ y(t_0) = y_0 \in \mathbb{R}^n, \end{cases}$$

où $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est supposée suffisamment régulière.

- Existence, unicité
- Solution stationnaire et comportement asymptotique
- Schéma de discrétisation numérique

Exemple 1 : Le pendule

$$\begin{cases} m\ell\theta'' = -\alpha\ell\theta' - mgsin(\theta) \\ \theta(0) = \theta_0, \text{ et } \theta'(0) = \theta'_0, \end{cases}$$



Le problème peut se réécrire sous la forme (1) avec

$$y = \begin{pmatrix} \theta \\ \theta' \end{pmatrix}, \quad f(y,t) = \begin{pmatrix} y_2 \\ -\frac{\alpha}{m}y_2 - \frac{g}{\ell}sin(y_1) \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad y(0) = \begin{pmatrix} \theta_0 \\ \theta'_0 \end{pmatrix},$$

- Existence de solution ?
- Fréquence d'oscillation du pendule ?

INSA INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES LYON

Pole Math

Exemple 2 : Pêche en Méditerranée avec les équations de prédation de Lotka-Volterra

Impact des quotas de pêche en Méditerranée sur les populations de thons et de sardines ?

- Inconnues: population de thons $\tau(t)$ et de sardines $s(t)$
- La quantité de sardines augmente naturellement mais elles sont mangées par les thons et sont pêchées :

$$s'(t) = c_s s(t) - d_s s(t)\tau(t) - p_s,$$

- La quantité de thons augmente en présence de sardines mais diminue dans le cas contraire et sont pêchées :

$$\tau'(t) = c_\tau s(t)\tau(t) - d_\tau \tau(t) - p_\tau$$

- Solutions stationnaires en fonction des paramètres de l'EDO ?

INSA INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES LYON
Pole Math

Exemple 3 : Rentrée atmosphérique

On cherche à établir le point d'impact sur Terre d'un vaisseau en phase de rentrée atmosphérique

- Inconnue: position du vaisseau $x(t) \in \mathbb{R}^3 \setminus B(0, R_T)$,
- Force gravitationnelle

$$F_G = -\frac{G m_s m_T}{|x(t)|^3} x(t),$$

- Force de frottement

$$F_F = -\alpha(|x(t)|)|x'(t)|x'(t).$$

- Lois de Newton

$$m_s x'' = F_G + F_F = -\frac{G m_s m_T}{|x(t)|^3} x(t) - \alpha(|x(t)|)|x'(t)|x'(t).$$

- Existence de solution? Stabilité de la solution? Contrôle de la solution ?

INSA INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES LYON

Pole Math

Résolution d'équations différentielles ordinaires
Cas linéaire d'ordre 1 et 2

1. Résolution de systèmes linéaires
2. Résolution d'équations non-linéaires
3. Résolution d'équations différentielles ordinaires
   - Analyse mathématiques des solutions
   - Discrétisation numérique des EDOs
4. Résolution d'équations aux dérivées partielles

INSA INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES LYON
Pole Math

Equation linéaire d'ordre 1

- Equation linéaire homogène d'ordre 1:
  Soit $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Les solutions de l'équation $y'(t) + \alpha(t)y(t) = 0$ sont de la forme

$$y(t) = c \exp\left(-\int_0^t \alpha(s)ds\right).$$

- Formule de Duhamel et variations de la constante:
  Soient $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $\beta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ des fonctions continues. les solutions de l'équation différentielle

$$y'(t) + \alpha(t)y(t) = \beta(t)$$

  sont de la forme

$$y(t) = c \exp\left(-\int_0^t \alpha(s)ds\right) + \int_0^t \beta(s) \exp\left(-\int_s^t \alpha(\tau)d\tau\right) ds.$$

INSA INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES LYON
Pole Math

Equation linéaire d'ordre 1

Exercice 21

Déterminer les solutions des EDO suivantes :

$$y' + ty = t$$

et

$$(1 - t^2)y' - ty = 0.$$

INSA INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES LYON
Pole Math

Cas d'équations homogènes d'ordre 2

- L'ensemble des solutions de l'équation

$$y''(t) + \omega^2 y(t) = 0,$$

sont de la forme

$$\begin{aligned} y(t) &= c_1 \exp(i\omega t) + c_{-1} \exp(-i\omega t) \\ &= a_1 \cos(\omega t) + b_1 \sin(\omega t) \end{aligned}$$

- L'ensemble des solutions de l'équation

$$y''(t) - \omega^2 y(t) = 0$$

sont de la forme

$$\begin{aligned} y(t) &= c_1 \exp(\omega t) + c_{-1} \exp(\omega t) \\ &= a_1 ch(\omega t) + b_1 sh(\omega t) \end{aligned}$$

INSA INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES LYON

Pole Math

Cas d'équations homogènes d'ordre 2

Plus généralement, la forme de l'ensemble des solutions de l'équation

$$ay''(t) + by'(t) + cy(t) = 0$$

dépend des propriétés des racines du polynôme caractéristique

$$p(X) = aX^2 + bX + c$$

- Si p admet 2 racines simples λ_1 et λ_2 alors y est de la forme

$$y(t) = c_1 \exp(\lambda_1 t) + c_2 \exp(\lambda_2 t)$$

- Si p admet 1 racine double λ alors

$$y(t) = c_1 \exp(\lambda t) + c_2 t \exp(\lambda t)$$

INSA INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES LYON
Pole Math

Cas d'équations homogènes d'ordre n

Exercice 22

Quelle est la forme des solutions de l'équation

$$y^{(n)} - y = 0?$$

INSA INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES LYON
Pole Math

Résolution d'équations différentielles ordinaires
Existence et unicité des solutions d'EDO

1. Résolution de systèmes linéaires
2. Résolution d'équations non-linéaires
3. Résolution d'équations différentielles ordinaires
   - Analyse mathématiques des solutions
   - Discrétisation numérique des EDOs
4. Résolution d'équations aux dérivées partielles

Existence + unicité de solution

On s'intéresse aux solutions de l'équation différentielle

$$(1) \quad \begin{cases} y'(t) = f(y(t), t), & \forall t \in [a, b] \\ y(t_0) = y_0 \in \mathbb{R}^n, & \text{avec } t_0 \in [a, b] \end{cases}$$

où en règle général, $f : \mathbb{R}^n \times [a, b] \to \mathbb{R}^n$ est supposée continue et localement Lipschitzienne par rapport à la première variable.

Definition 21 (Localement Lipschitzienne)

On dit que $f : \mathbb{R}^n \times [a, b] \to \mathbb{R}^n$ est localement Lipschitzienne par rapport à la première variable, si tout pour $u_0 \in \mathbb{R}^n$, il existe un voisinage U de u_0 et un réel $L > 0$ tels que

$$\|f(u, t) - f(v, t)\| \leq L\|u - v\|, \qquad \forall (u, v) \in U^2.$$

Pour simplifier les choses, on pourra aussi supposer que f est C^1 sur $\mathbb{R}^n \times [a, b]$

INSA INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES LYON

Pole Math

Exercice 23

Exemple avec

$$\begin{cases} y'(t) = \sqrt{|y(t)|}, & \forall t \in \mathbb{R} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

La fonction $f(t,u) = \sqrt{|u|}$ n'est pas lipschitzienne par rapport à u !
Montrer que cette équation admet plusieurs solutions !

Exercice 24

Exemple avec

$$\begin{cases} y'(t) = y(t)^2, & \forall t \in \mathbb{R} \\ y(0) = y_0 > 0 \end{cases}$$

La fonction f associée est bien continue et localement Lipschitz.
Montrer que ce problème admet pour solution

$$y(t) = \frac{1}{y_0^{-1} + t_0 - t}, \quad \text{pour} \quad t < t_0 + y_0^{-1}.$$

Résolution d'équations différentielles ordinaires
Solution d'EDO dans le plan à coefficient constant

1. Résolution de systèmes linéaires
2. Résolution d'équations non-linéaires
3. Résolution d'équations différentielles ordinaires
   - Analyse mathématiques des solutions
   - Discrétisation numérique des EDOs
4. Résolution d'équations aux dérivées partielles

INSA INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES LYON

Pole Math

Système d'EDO linéaire dans le plan à coefficient constant

On s'intéresse dans cette section un système 2D :

$$y'(t) = Ay(t), \quad \text{avec } A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ et } y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

Les solutions de ce système sont de la forme

$$y(t) = \exp(tA) \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix},$$

où $\exp(A)$ est l'exponentielle de la matrice A définie par

$$\exp(A) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!}.$$

INSA INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES LYON
Pole Math

Exemple de calcul de l'exponentielle de matrice

- Cas d'une matrice A diagonale

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \Longrightarrow exp(tA) = \begin{pmatrix} \exp(t\lambda_1) & 0 \\ 0 & \exp(t\lambda_2) \end{pmatrix},$$

ce qui conduit à des solutions de la forme

$$y(t) = (\alpha_1 \exp(t\lambda_1), \alpha_2 \exp(t\lambda_2))^t.$$

- Cas d'une matrice de rotation A

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow exp(tA) = \begin{pmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ -sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix},$$

ce qui conduit à des solutions de la forme

$$y(t) = (\alpha_1 cos(t) + \alpha_2 sin(t), \alpha_1 cos(t) - \alpha_2 sin(t))^t.$$

INSA INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES LYON
Pole Math

Solutions explicites 1

Premier cas : matrice diagonalisable dans $\mathbb{R}$ *:*
Si A admet des valeurs propres λ_1, λ_2 associées aux vecteurs propres e_1 et e_2,

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \quad \text{avec } P = [e_1, e_2],$$

alors

$$P^{-1}\exp(tA)P = \begin{pmatrix} \exp(\lambda_1 t) & 0 \\ 0 & \exp(\lambda_2 t) \end{pmatrix}$$

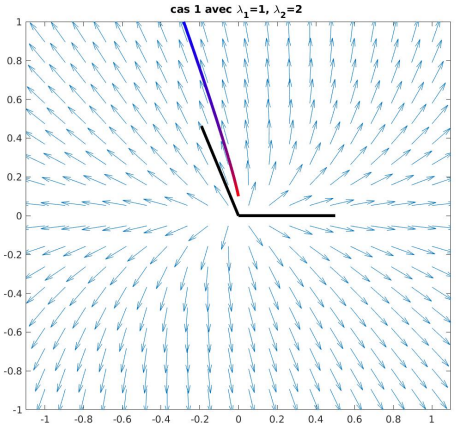
et les solutions sont de la forme

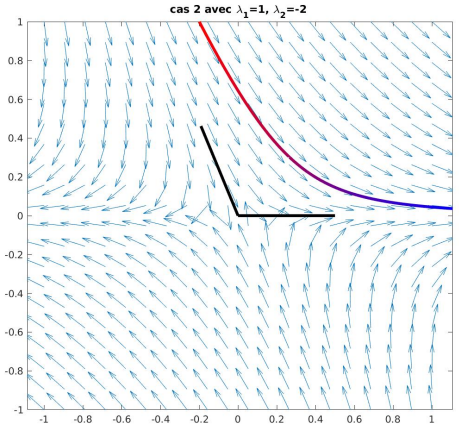
$$y(t) = \alpha_1 \exp(\lambda_1 t)e_1 + \alpha_2 \exp(\lambda_2 t)e_2$$

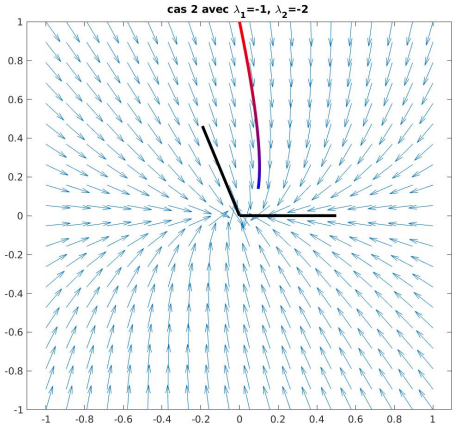
INSA INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES LYON
Pole Math

Solutions explicites 1

- Cas $\lambda_1 > 0$ et $\lambda_2 > 0$: nœud instable
- Cas $\lambda_1 > 0 > \lambda_2$: point-selle
- Cas $\lambda_1 < 0$ et $\lambda_2 < 0$: nœud stable







INSA INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES LYON
Pole Math

Solutions explicites 2

Deuxième cas : Valeurs propres réelles mais non diagonalisable :
Dans ce cas, la valeur propre est nécessairement unique, λ et d'après le théorème de Jordan, la matrice se décompose sous la forme

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Alors

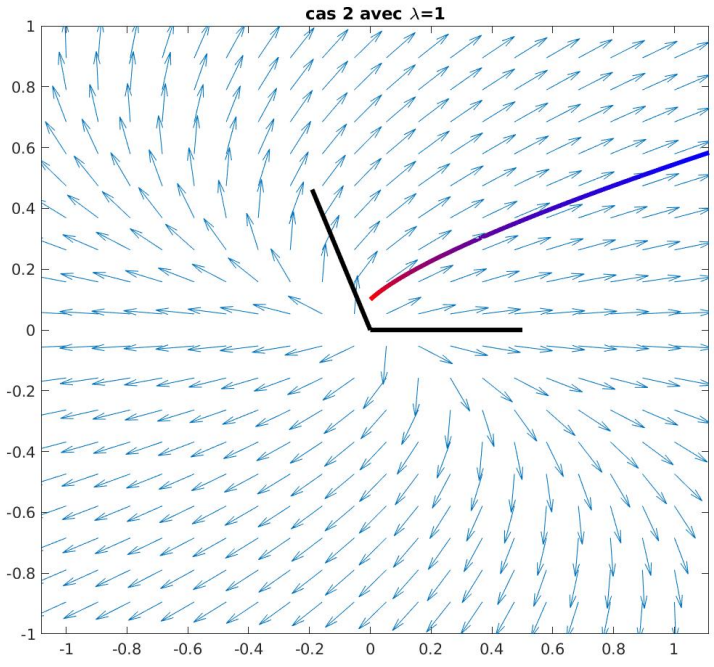
$$P^{-1}\exp(tA)P = \begin{pmatrix} \exp(\lambda t) & t\exp(\lambda t) \\ 0 & \exp(\lambda t) \end{pmatrix}$$

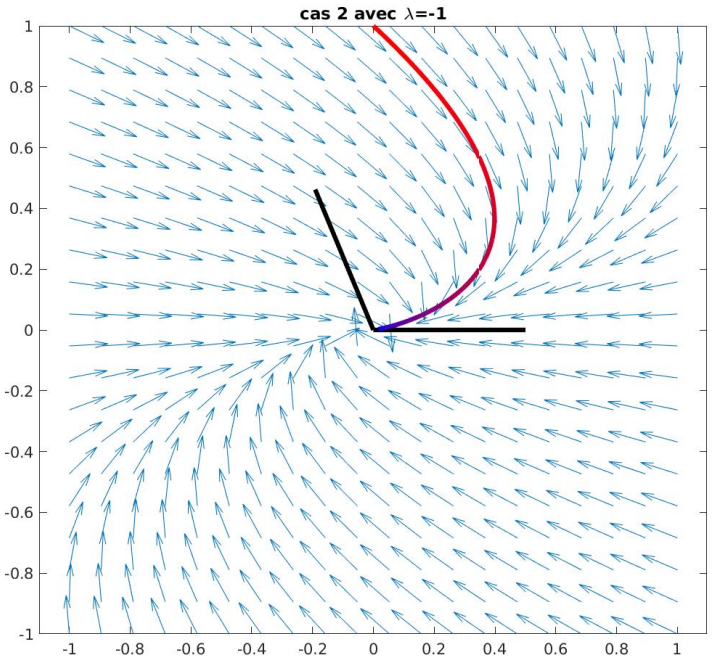
et les solutions sont de la forme

$$y(t) = (\alpha_1 + \alpha_2 t)\exp(\lambda t)e_1 + \alpha_2 \exp(\lambda t)e_2$$

Solutions explicites 2

- Cas $\lambda_1 = \lambda_2 > 0$: nœud dégénéré instable
- Cas $\lambda_1 = \lambda_2 < 0$: nœud dégénéré stable





INSA INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES LYON

Pole Math

Solutions explicites 3

Troisième cas : cas de valeurs propres complexes :
Dans ce cas, les valeurs propres sont complexes conjuguées

$$\lambda_{\pm} = a \pm ib,$$

et la matrice se décompose sous la forme

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} = \rho R_\theta,$$

où

$$\rho e^{i\theta} = a + ib \quad \text{et} \quad R_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & sin(\theta) \\ -sin(\theta) & cos(\theta) \end{pmatrix}$$

Alors

$$P^{-1}\exp(tA)P = \exp(ta)\begin{pmatrix} \cos(bt) & sin(bt) \\ -sin(bt) & cos(bt) \end{pmatrix}.$$

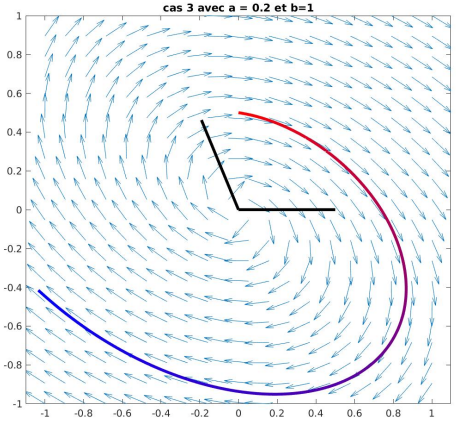
et les solutions s'expriment sous la forme

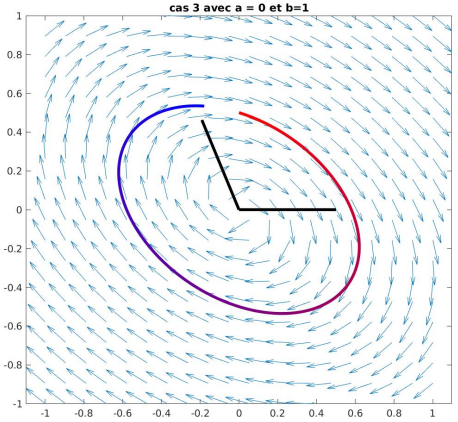
$$y(t) = \exp(at)\left[(\alpha_1 cos(bt) + \alpha_2 sin(bt))e_1 + (\alpha_1 sin(bt) - \alpha_2 cos(bt))e_2\right]$$

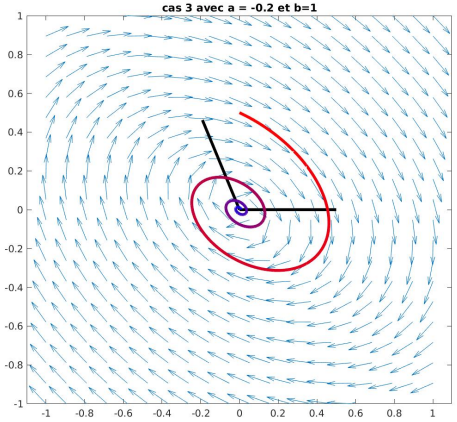
INSA LYON

Solutions explicites 2

- Cas $\lambda_\pm = a \pm ib$ avec $a > 0$: foyer instable
- Cas $\lambda_\pm = a \pm ib$ avec $a = 0$: centre
- Cas $\lambda_\pm = a \pm ib$ avec $a < 0$: foyer stable







INSA INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES LYON

Pole Math

Résolution d'équations différentielles ordinaires
Analyse qualitative et stabilité

1. Résolution de systèmes linéaires
2. Résolution d'équations non-linéaires
3. Résolution d'équations différentielles ordinaires
   - Analyse mathématiques des solutions
   - Discrétisation numérique des EDOs
4. Résolution d'équations aux dérivées partielles

INSA INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES LYON
Pole Math

Système d'EDO autonome

On considère maintenant un système d'EDO autonome :

$$y'(t) = f(y(t)),$$

où $f : \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{R}^d$ et telle qu'il existe une solution pour $t > 0$.

On dit de plus que y_e est un point d'équilibre si

$$f(y_e) = 0.$$

INSA INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES LYON
Pole Math

Notion de stabilité

Definition 22

Un point d'équilibre y_e est :

- Stable si

$$\forall \delta > 0, \exists \delta > 0, \quad \{\|y(0) - y_e\| < \eta\} \Longrightarrow \{\forall t > 0, \|y(t) - y_e\| < \delta\}$$

- Attractif si

$$\exists \eta > 0, \quad \{\|y(0) - y_e\| < \eta\} \Longrightarrow \{\lim_{t \to \infty} y(t) = y_e\}$$

- Asymptotiquement stable s'il est stable et attractif
- Instable s'il n'est pas stable

INSA INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES LYON
Pole Math

Stabilité et cas d'un système linéaire

Theorem 23

Dans le cas d'un système linéaire

$$y'(t) = Ay(t),$$

où A est une matrice de taille d. Alors, $y_e = 0$ *est un point d'équilibre et*

- *Le point* $y_e = 0$ *est asymptotiquement stable si toutes les valeurs propres de A sont de partie réelle strictement négative*
- *Le point* $y_e = 0$ *est instable dès qu'une valeur propre de A a une partie réelle strictement positive.*

INSA INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES LYON

Pole Math

Cas général et linéarisation

On considère maintenant un système d'EDO autonome

$$y'(t) = f(y(t)),$$

et y_e un point stationnaire avec $f(y_e) = 0$.

L'étude de la stabilité du point fixe y_e peut s'effectuer en linéarisant l'équation au voisinage de y_e.
En remarquant que

$$x(t) = y(t) - y_e,$$

on vérifie que

$$\begin{aligned} x'(t) = y'(t) &= f(y(t)) - f(y_e(t)) \\ &\simeq Df(y_e)(y(t) - y_e) = Df(y_e)(x(t)) \end{aligned}$$

INSA INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES LYON
Pole Math

Stabilité, cas général

Theorem 24

On considère un système

$$y'(t) = f(y(t)),$$

où f est une fonction de classe C^1 telle que $f(y_e) = 0$.

Alors y_e est un point d'équilibre et on note $A = Df(y_e)$ la matrice Jacobienne de f en y_e. De plus

- *Le point y_e est asymptotiquement stable si toutes les valeurs propres de A sont de partie réelle strictement négative*
- *Le point y_e est instable dès qu'une valeur propre de A a une partie réelle strictement positive.*

INSA INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES LYON
Pole Math

Cas du système de Volterra-Lotka

Exercice 25

On s'intéresse au système de Volterra-Lotka

$$\begin{cases} y_1'(t) &= y_1(t)(a - by_2(t)) \\ y_2'(t) &= y_2(t)(-c + dy_1(t)) \end{cases}$$

- Trouver les points d'équilibre de ce système
- Étudier la stabilité de ce système en

$$y_e = (c/d, a/b).$$

INSA INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES LYON
Pole Math

Cas de l'équation du pendule

Exercice 26

On s'intéresse aux points d'équilibre pour le problème du pendule simple

$$\theta''(t) = -\sin(\theta)$$

- Étudier la stabilité des points d'équilibre pour le problème du pendule simple
- Peut t'on conclure dans tous les cas ?

INSA INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES LYON
Pole Math

1 Résolution de systèmes linéaires

2 Résolution d'équations non-linéaires

3 Résolution d'équations différentielles ordinaires
- Analyse mathématiques des solutions
- Discrétisation numérique des EDOs

4 Résolution d'équations aux dérivées partielles

Discrétisation de l'équation

On suppose que le problème (1) admet une solution y suffisamment régulière sur $[t_0, t_0 + T]$.

- Discrétisation de l'intervalle $[t_0, t_0 + T]$ avec N points :
  Avec $h = \frac{T}{N}$, on pose $t_n = t_0 + hn$ pour tout $n = 0 : N$.
- Approximation numérique de y aux noeuds t_n

$$y_n \simeq y(t_n).$$

- Schéma numérique de la forme

$$y_{n+1} = y_n + h\phi(t_n, y_n).$$

- Exemple :

$$\begin{cases} \text{Euler explicite} & \Rightarrow \phi(t_n, y_n) = f(t_n, y_n) \\ \text{Euler implicite} & \Rightarrow \phi(t_n, y_n) = f(t_{n+1}, y_{n+1}) \\ \text{RK2} & \Rightarrow \phi(t_n, y_n) = (f(t_{n+1}, k) + f(t_n, y_n))/2 \end{cases}$$

où $k = y_n + hf(t_n, y_n)$

INSA INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES LYON
Pole Math

Comparaison Euler Explicite-implicite sur un système raide

On s'intéresse au problème suivant

$$\begin{cases} y'(t) + Ly(t) = 0, & \forall t \in \mathbb{R}^+ \\ y(0) = y_0 \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

- Calculer la solution exacte de ce problème
- Déterminer l'approximation numérique y_n par la méthode d'Euler Explicite.
- Déterminer l'approximation numérique y_n par la méthode d'Euler implicite.
- Déterminer l'approximation numérique y_n par la méthode de RK2.

INSA INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES LYON
Pole Math

Convergence d'une méthode numérique

Définition (Consistance et ordre d'une méthode numérique)

Avec

$$\tau_{n+1}(h) = \frac{y(t_{n+1}) - y(t_n)}{h} - \phi(t_n, y(t_n)),$$

La méthode numérique est dite consistante si $\lim_{h\to 0} \tau_{n+1}(h) = 0$.
Elle est de plus d'ordre p si

$$\|\tau_{n+1}(h)\| \leq Ch^p.$$

Définition (Stabilité)

La stabilité d'un schéma numérique consiste à contrôler, pour un pas de temps δ_t fixé, l'erreur

$$e_n = y(t_n) - y_n,$$

au cours des itérations.

Résolution d'équations différentielles ordinaires
Méthodes d'Euler explicite-implicite

1. Résolution de systèmes linéaires
2. Résolution d'équations non-linéaires
3. Résolution d'équations différentielles ordinaires
   - Analyse mathématiques des solutions
   - Discrétisation numérique des EDOs
4. Résolution d'équations aux dérivées partielles

INSA INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES LYON

Pole Math

Résolution d'équations différentielles ordinaires

1. Résolution de systèmes linéaires
2. Résolution d'équations non-linéaires
3. Résolution d'équations différentielles ordinaires
   - Analyse mathématiques des solutions
   - Discrétisation numérique des EDOs
4. Résolution d'équations aux dérivées partielles

Méthode d'Euler explicite

Idée :

$$y(t_1) - y(t_0) = \int_{t_0}^{t_1} y'(t)dt = \int_{t_0}^{t_1} f(t, y(t)dt \simeq hf(t_0, y(t_0))$$

Algorithme (Euler explicite)

Donnée : $y_0 \in \mathbb{R}^n$,

for $k = 0 : N - 1$

$$y_{n+1} = y_n + h\, f(t_n, y_n)$$

End

INSA INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES LYON
Pole Math

Euler explicite : Consistance et ordre de la méthode

On remarque que

$$\begin{aligned}\tau_{n+1}(h) &= \frac{1}{h}\left[y(t_{n+1}) - y(t_n) - hf(t_n, y(t_n))\right] \\ &= \frac{1}{h}\left[y(t_n + h) - y(t_n) - hy'(t_n)\right] \\ &= \frac{1}{h}h^2\frac{1}{2}y''(\eta) \quad \text{avec } \eta \in [t_n, t_{n+1}],\end{aligned}$$

Avec $M = \sup_{t\in[t_0,t_0+T]}\{|y''(t)|\}$, on en déduit que

Théorème 25 (Consistance méthode Euler explicite)

$$|\tau_{n+1}(h)| \leq \frac{M}{2}h.$$

La méthode d'Euler explicite est donc consistante et d'ordre 1.

INSA INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES LYON
Pôle Math

Euler explicite : Stabilité

Avec $e_n = y(t_n) - y_n$, on montre que

$$\begin{aligned}
e_{n+1} &= y(t_{n+1}) - y_{n+1} \\
&= y(t_n) + \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t, y(t))dt - (y_n + hf(t_n, y_n)) \\
&= e_n + \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t, y(t))dt - hf(t_n, y_n) \\
&= e_n + \left[\int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t, y(t))dt - hf(t_n, y(t_n))\right] + h\left[f(t_n, y(t_n)) - f(t_n, y_n\right. \\
&= e_n + h\tau_{n+1}(h) + h\left[f(t_n, y(t_n)) - f(t_n, y_n)\right]
\end{aligned}$$

On rappelle que f est L-localement Lipschitzienne et donc

$$|e_{n+1}| \leq (1 + Lh)|e_n| + \frac{h^2}{2}M.$$

INSA INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES LYON

Pole Math

Euler explicite : Stabilité

Au final,

$$\begin{aligned}
|e_{n+1}| &\leq (1+Lh)|e_n| + \frac{h^2}{2}M \\
&\leq (1+Lh)^2|e_{n-1}| + \frac{h^2}{2}M\,(1+(1+h\,L)) \\
&\leq (1+Lh)^n|e_0| + \frac{h^2}{2}M\sum_{k=0}^{n-1}(1+h\,L)^k \\
&\leq exp(Lt_n)|e_0| + \frac{h}{2}M\frac{1}{L}\,[exp(t_nL)-1]
\end{aligned}$$

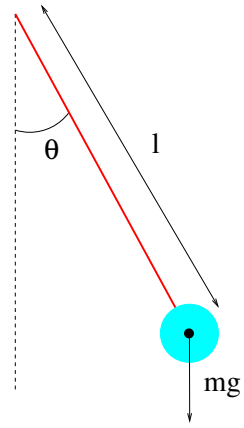
On en déduit le théorème suivant

Théorème 26 (Stabilité algorithme Euler explicite)

$$\|y(t_n)-y_n\| \leq exp(LT)\|y(t_0)-y_0\| + \frac{Mh}{2}T\ exp(LT)$$

Exemple: Le pendule

$$\begin{cases} ml\theta'' = -\alpha\ell\theta' - mgsin(\theta) \\ \theta(0) = \theta_0, \text{ et } \theta'(0) = \theta'_0, \end{cases}$$



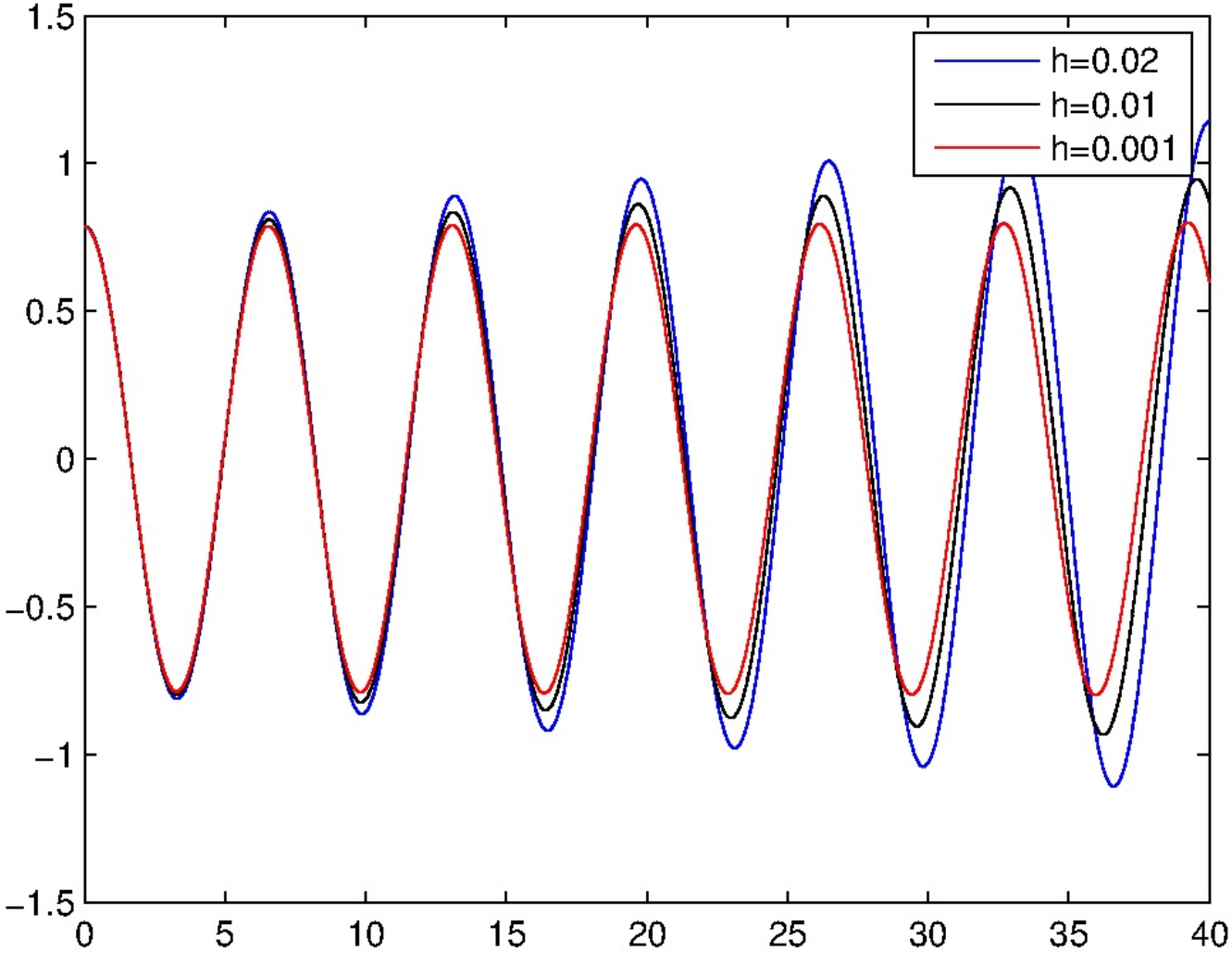
Avec $y = \begin{pmatrix} \theta \\ \theta' \end{pmatrix}$, cette équation se réécrit sous la forme

$$y'(t) = f(t, y) = \begin{pmatrix} y_2 \\ -\frac{\alpha}{m} y_2 - \frac{g}{\ell} sin(y_1) \end{pmatrix},$$

Exercice 27

Écrire l'algorithme d'Euler explicite dans le cas particulier de l'équation du pendule.

Le pendule sans frottement : simulation numérique avec la méthode d'Euler explicite



Méthode d'Euler implicite

Idée :

$$y(t_1) - y(t_0) = \int_{t_0}^{t_1} y'(t)dt = \int_{t_0}^{t_1} f(t, y(t)dt \simeq hf(t_1, y(t_1))$$

Algorithme (Euler explicite)

Donnée : $y_0 \in \mathbb{R}^n$,

for $k = 0 : N - 1$

Déterminer y_{n+1}, solution de

$$F(y) = y - h\, f(t_{n+1}, y) - y_n = 0$$

End

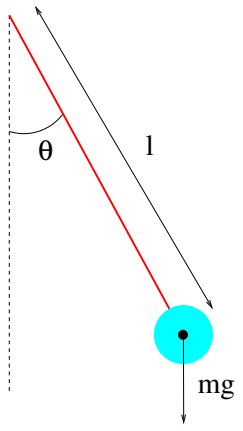
Exercice 28

Montrer que le schéma d'Euler explicite est bien consistant d'ordre 1

Équation du pendule

Exemple: Le pendule

$$\begin{cases} ml\theta'' = -\alpha\ell\theta' - mgsin(\theta) \\ \theta(0) = \theta_0, \text{ et } \theta'(0) = \theta'_0, \end{cases}$$



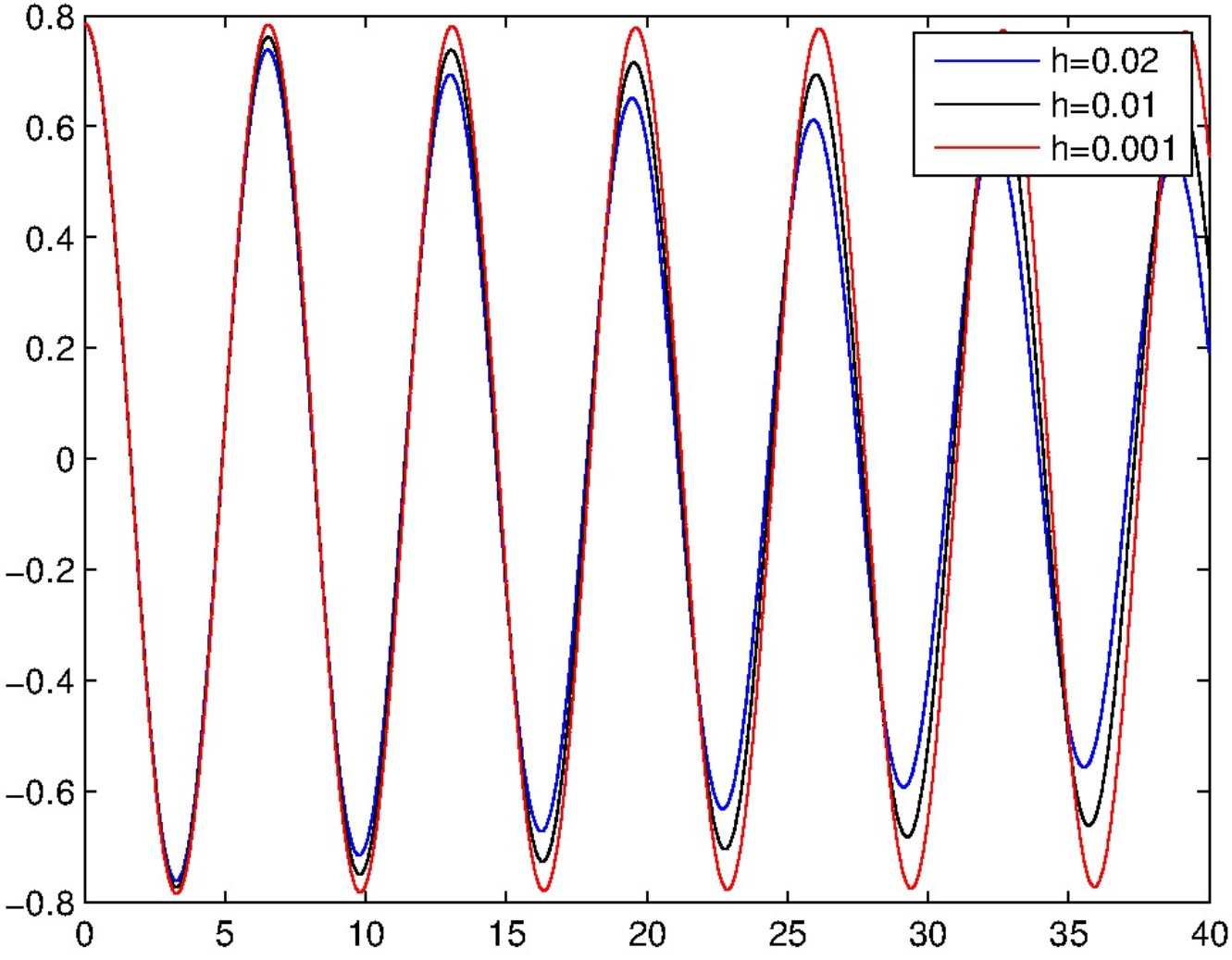
Avec $y = \begin{pmatrix} \theta \\ \theta' \end{pmatrix}$, cette équation se réécrit sous la forme

$$y'(t) = f(t, y) = \begin{pmatrix} y_2 \\ -\frac{\alpha}{m} y_2 - \frac{g}{\ell} sin(y_1) \end{pmatrix},$$

Exercice 29

Écrire l'algorithme d'Euler implicite dans le cas particulier de l'équation du pendule. On utilisera l'algorithme de Newton pour évaluer y_{n+1} en fonction de y_n.

Le pendule sans frottement : simulation numérique avec la méthode d'Euler implicite



Résolution d'équations différentielles ordinaires
Méthodes d'ordre supérieur

1. Résolution de systèmes linéaires
2. Résolution d'équations non-linéaires
3. Résolution d'équations différentielles ordinaires
   - Analyse mathématiques des solutions
   - Discrétisation numérique des EDOs
4. Résolution d'équations aux dérivées partielles

Schémas numériques d'ordre supérieur à 1 pas

On suppose que le problème

$$(1) \quad \begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)), & \forall t \in [a, b] \\ y(t_0) = y_0 \in \mathbb{R}^n, & \text{avec } t_0 \in [a, b] \end{cases}$$

admet une solution y suffisamment régulière sur $[t_0, t_0 + T]$.

- Discrétisation de l'intervalle $[t_0, t_0 + T]$ avec N points :
  Avec $h = \frac{T}{N}$, on pose $t_n = t_0 + hn$ pour tout $n = 0 : N$.
- Approximation numérique de y aux noeuds t_n

$$y_n \simeq y(t_n).$$

- Schéma numérique de la forme

$$y_{n+1} = y_n + h\phi(t_n, y_n).$$

Objectif : Trouver des schémas numériques d'ordre supérieur à 1.

Méthode de Taylor

Idée :

$$\begin{aligned} y(t_{n+1}) &= y(t_n + h) = y(t_n) + y'(t_n)h + y''(t_n)\frac{h^2}{2} + O(h^3) \\ &= y(t_n) + f(t_n, y(t_n))h + \frac{d}{dt}\left[f(t, y(t))\right]_{|t=t_n}\frac{h^2}{2} + O(h^3), \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left[f(t, y(t))\right] &= \partial_t f(t, y(t)) + \partial_y f(t, y(t))y'(t) \\ &= \partial_t f(t, y(t)) + \partial_y f(t, y(t))f(t, y(t)) \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} y(t_{n+1}) &= y(t_n) + f(t_n, y(t_n))h + \frac{h^2}{2}\partial_t f(t_n, y(t_n)) \\ &\quad + \frac{h^2}{2}\partial_y f(t_n, y(t_n))f(t_n, y(t_n)) + O(h^3) \end{aligned}$$

INSA INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES LYON

Pole Math

Méthode de Taylor

Algorithme

Donnée : $y_0 \in \mathbb{R}^n$,

For $k = 0 : N - 1$

$$y_{n+1} = y_n + f(t_n, y_n))h + \frac{h^2}{2}\left[\partial_t f(t_n, y_n) + \partial_y f(t_n, y_n) f(t_n, y_n)\right]$$

End

- Consistance : Ordre 2 : $|\tau_{n+1}| \leq Ch^2$
- Extension dimension supérieure :
  Utiliser les dérivées partielles d'ordre supérieur

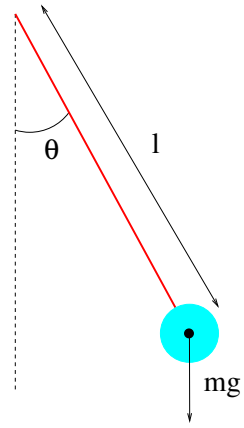
$$\partial^2_{tt} f, \quad \partial^2_{ty} f, \quad \text{et} \quad \partial^2_{yy} f \quad \ldots$$

- Difficultés : Pas de connaissance systématique de ces dérivées partielles !

INSA INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES LYON
Pole Math

Exemple: Le pendule

$$\begin{cases} ml\theta'' = -\alpha\ell\theta' - mgsin(\theta) \\ \theta(0) = \theta_0, \text{ et } \theta'(0) = \theta'_0, \end{cases}$$



Avec $y = \begin{pmatrix} \theta \\ \theta' \end{pmatrix}$, cette équation se réécrit sous la forme

$$y'(t) = f(t, y) = \begin{pmatrix} y_2 \\ -\frac{\alpha}{m} y_2 - \frac{g}{\ell} sin(y_1) \end{pmatrix},$$

Exercice 30

Écrire l'algorithme de Taylor d'ordre 2 dans le cas particulier de l'équation du pendule.

Méthode de Runge Kutta d'ordre 2

Idée : On souhaite déterminer des coefficients (a_1, a_2, a_3, a_4) tels que

$$\begin{aligned} y(t_{n+1}) &= y(t_n) + a_1 h\, f(t_n, y(t_n)) \\ &\quad + a_2 h\, f(t_n + a_3 h, y(t_n) + a_4 h) + O(h^3) \end{aligned}$$

En remarquant que

$$f(t_n + a_3 h, y(t_n) + a_4 h) = f(t_n, y(t_n)) + a_3 h \partial_t f(t_n, y(t_n)) + a_4 h \partial_y f(t_n, y(t_n))$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} A &= y(t_n) + a_1 h\, f(t_n, y(t_n)) + a_2 h\, f(t_n + a_3 h, y(t_n) + a_4 h) \\ &= y(t_n) + (a_1 + a_2) h\, f(t_n, y(t_n)) + a_2 a_3 h^2 \partial_t f(t_n, y(t_n)) \\ &\quad + a_2 a_4 h^2 \partial_y f(t_n, y(t_n)) + O(h^3) \end{aligned}$$

INSA INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES LYON

Pole Math

On rappelle que le développement de Taylor montre

$$\begin{aligned} y(t_{n+1}) &= y(t_n) + f(t_n, y(t_n))h + \frac{h^2}{2}\partial_t f(t_n, y(t_n)) \\ &\quad + \frac{h^2}{2}\partial_y f(t_n, y(t_n)) f(t_n, y(t_n)) + O(h^3). \end{aligned}$$

Les coefficients (a_1, a_2, a_3, a_4) doivent donc satisfaire les conditions suivantes :

$$\begin{cases} a_1 + a_2 &= 1 \\ a_2 a_3 &= 1/2 \\ a_2 a_4 &= f(t_n, y(t_n))/2 \end{cases}$$

INSA INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES LYON
Pole Math

Méthode d'Euler modifiée (RK2)

Choix des coefficients (a_1, a_2, a_3, a_4) :

$a_1 = a_2 = \frac{1}{2}, \quad a_3 = 1, \quad$ et $\quad a_4 = f(t_n, y(t_n))$

Algorithme (Runge Kutta 2)

Donnée : $y_0 \in \mathbb{R}^n$,

for $k = 0 : N - 1$

$$k_1 = y_n + hf(t_n, y_n)$$
$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}\left(f(t_n, y_n) + f(t_n + h, k_1)\right)$$

End

Lien avec la méthode des trapèzes

$$\begin{aligned} y(t_{n+1}) - y(t_n) &= \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t, y(t))dt \\ &= \frac{h}{2}\left[f(t_n, y(t_n)) + f(t_{n+1}, y(t_{n+1}))\right] + O(h^2) \\ &= \frac{h}{2}\left[f(t_n, y(t_n)) + f(t_{n+1}, y_n + hf(t_n, y(t_n)))\right] + O(h^2) \end{aligned}$$

Méthode du point du milieu

Choix des coefficients (a_1, a_2, a_3, a_4) :

$a_1 = 0, \quad a_2 = 1, \quad a_3 = 1/2, \quad$ et $\quad a_4 = f(t_n, y(t_n))/2$

Algorithme (Méthode du point du milieu)

Donnée : $y_0 \in \mathbb{R}^n$,

for $k = 0 : N - 1$

$k_1 = y_n + h/2\ f(t_n, y_n)$

$y_{n+1} = y_n + hf(t_n + h/2, k_1)$

End

Lien avec la méthode des rectangles

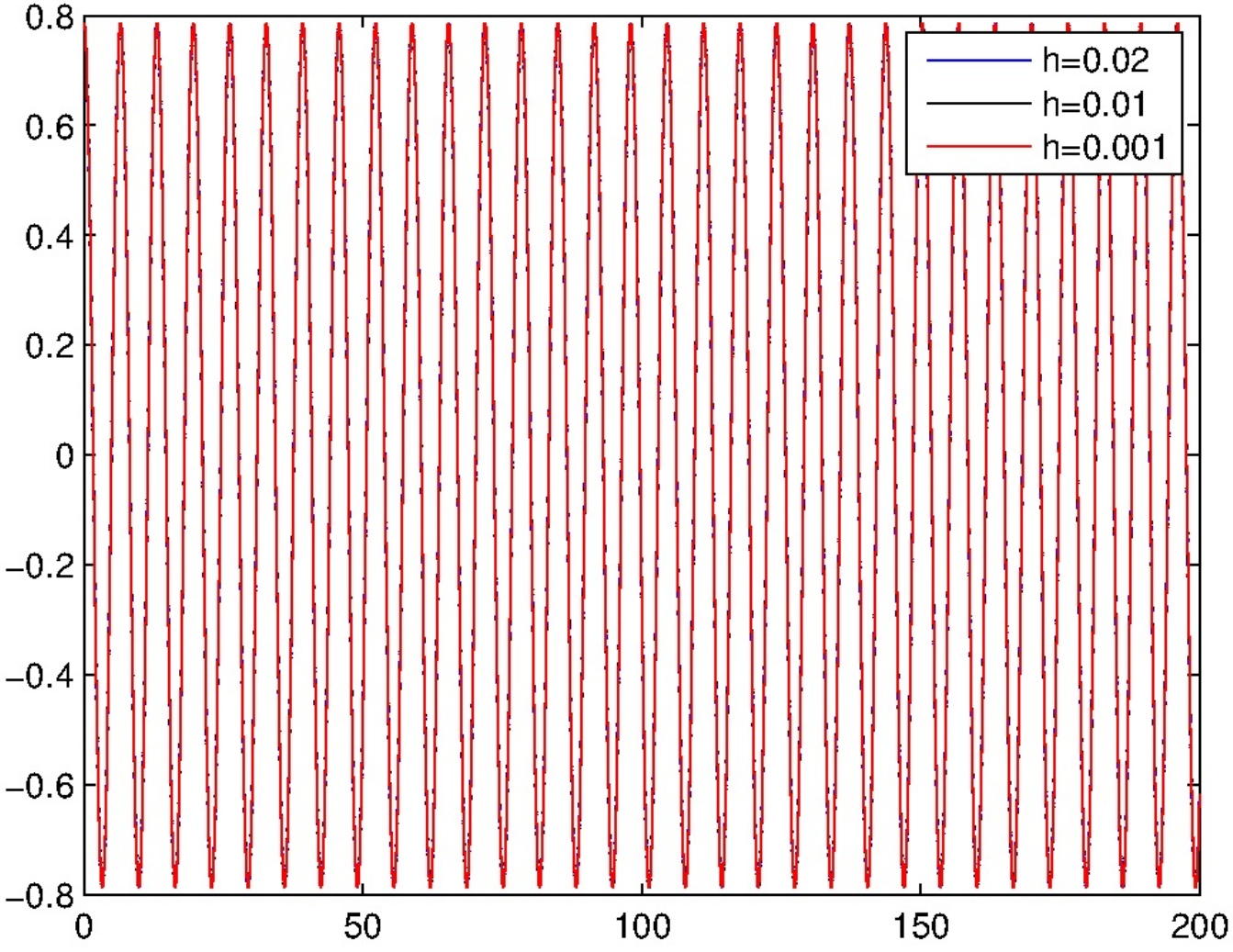
$$y(t_{n+1}) - y(t_n) = \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t, y(t))dt = hf(t_n + h/2, y(t_n + h/2)) + O(h^2)$$

$$= h\, f\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2} f(t_n, y(t_n))\right) + O(h^2)$$

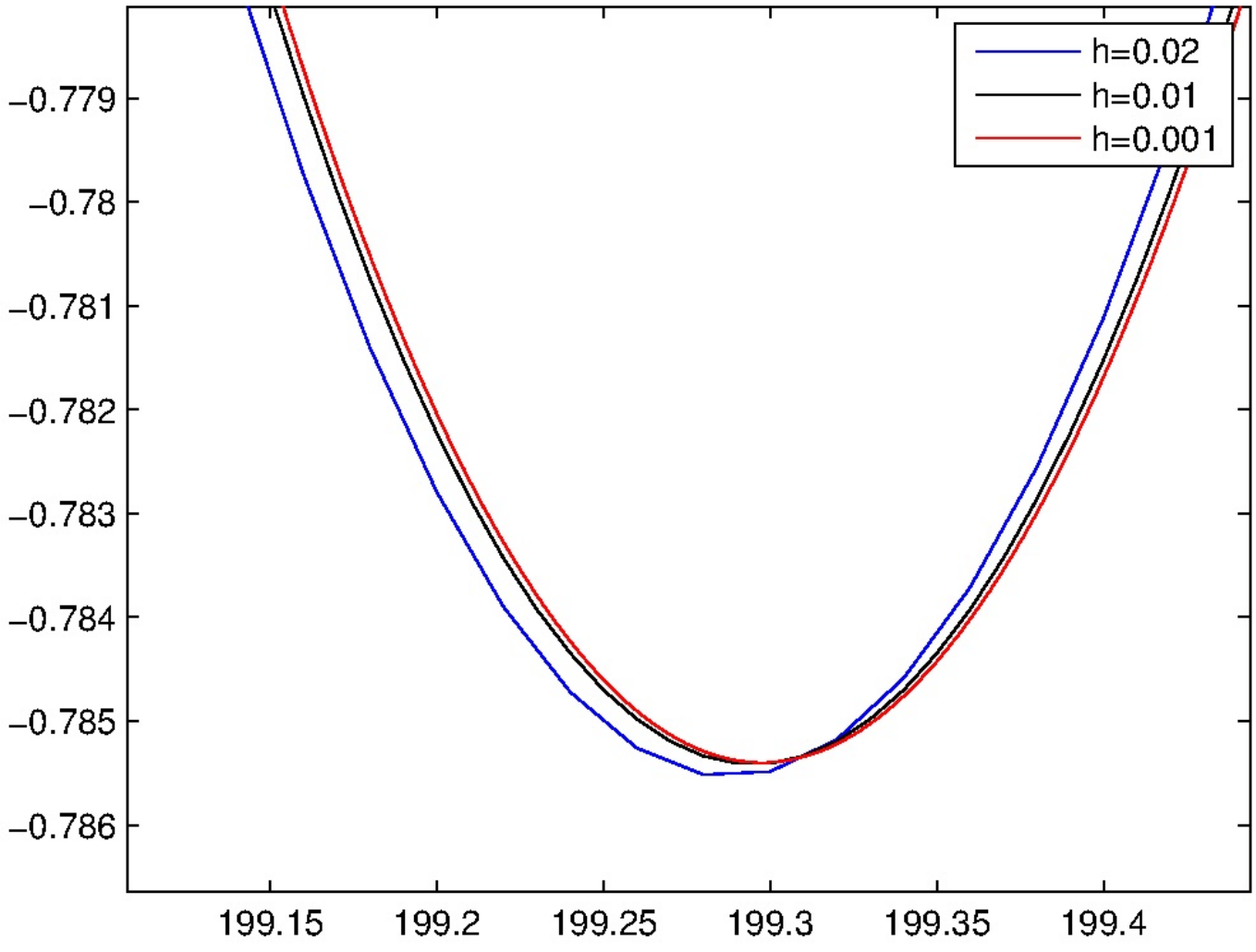
INSA INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES LYON

Pole Math

Le pendule sans frottement : simulation numérique avec la méthode RK2



Le pendule sans frottement : Exemple simulation numérique avec la méthode RK2



Méthode Runge Kutta d'ordre 4 (RK4)

Même idée avec des développements de Taylor d'ordre supérieur :

Algorithme (Méthode RK4)

Donnée : $y_0 \in \mathbb{R}^n$,

for $k = 0 : N - 1$

$$
\begin{aligned}
k_1 &= f(t_n, y_n) \\
k_2 &= f(t_n + h/2, y_n + h/2 k_1) \\
k_3 &= f(t_n + h/2, y_n + h/2 k_2) \\
k_3 &= f(t_n + h, y_n + h k_3) \\
y_{n+1} &= y_n + \tfrac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)
\end{aligned}
$$

End

- Méthode d'ordre 4, très utilisée en pratique ...
- Voir le lien avec l'intégration de Simpson !

Méthodes d'ordre supérieur multi-pas : formule D'Adams-Bashforth

Idée : Utiliser les estimations de $y_n, y_{n-1}, y_{n-2} \ldots y_{n-k}$ pour obtenir une approximation de y_{n+1}.

Exemple avec k=1

Interpolation linéaire de $y'(t) = f(t, y(t))$ au noeuds t_n et t_{n-1}. Avec $f_n = f(t_n, y_n)$, alors

$$y'(t) = f(t, y(t)) \simeq f_{n-1} \frac{t - t_n}{h} + f_n \frac{t - t_{n-1}}{h},$$

et finalement,

$$\begin{aligned} y(t_{n-1}) - y(t_n) &= \int_{t_n}^{t_{n+1}} y'(t)dt = \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t, y(t))dt \\ &\simeq \int_{t_n}^{t_{n+1}} f_{n-1} \frac{t - t_n}{h} + f_n \frac{t - t_{n-1}}{h} dt \end{aligned}$$

INSA INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES LYON

Pole Math

Méthode d'ordre supérieur multi-pas : formule D'Adams-Bashforth

Exercice 31

Montrer que

$$y(t_{n-1}) - y(t_n) \simeq \frac{h}{2}\left[3f_n - f_{n-1}\right]$$

Algorithme (Méthode d'Adams-Bashforth d'ordre 2)

Donnée : $y_0 \in \mathbb{R}^n$,

for $k = 0 : N-1$

$f_n = f(t_n, y_n)$

$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(3f_n - f_{n-1})$

End

- Extension ordre supérieur // explicite-implicite !

INSA INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES LYON

Pole Math

Résolution d'équations différentielles ordinaires
Adaptativité du pas de temps

1. Résolution de systèmes linéaires
2. Résolution d'équations non-linéaires
3. Résolution d'équations différentielles ordinaires
   - Analyse mathématiques des solutions
   - Discrétisation numérique des EDOs
4. Résolution d'équations aux dérivées partielles

Utilisation d'un pas adaptatif

Motivation : L'utilisation d'un pas de temps h uniforme est très coûteux dans certain cas, et il devient plus efficace d'utiliser un pas de temps h_n adaptatif, choisi plus petit dans les zones où y évolue fortement !

Rappel :

Schéma numérique: $y_{n+1} = y_n + h_n \phi(t_n, y_n)$

Consistance: $\tau_n(h_n) \simeq \omega_n h_n^p + O(h_n^{p+1})$

Erreur: $\max_n |e_n| \leq C(T) \sum_n h_n |\tau_n(h_n)|$

INSA INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES LYON
Pole Math

Estimation de ω_n à l'instant t_n

- Consistance:

$$\tau_n(h_n) \simeq \omega_n h_n^p + O(h_n^{p+1})$$

- Evaluation d'une approximation de y^{n+1} en utilisant 2 pas de temps différents:

$$\begin{aligned} y_{n+1}^h &= y_n + h\phi(t_n, y_n) \\ y_{n+1}^{h/2} &= y_{n+1/2}^{h/2} + \frac{h}{2}\phi(t_n, y_{n+1/2}^{h/2}), \text{ où } y_{n+1/2}^{h/2} = y_n + h\phi(t_n, y_n) \end{aligned}$$

- Estimation de ω_n en comparant les deux solutions

$$\omega_n \simeq \frac{y_{n+1}^{h/2} - y_{n+1}^h}{h^{p+1}(1 - 2^{-p})}$$

INSA INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES LYON

Pole Math

Choix d'un pas de temps optimal h_n

- Contrôler l'erreur uniformément en n:

$$\max_n |e_n| \leq \epsilon$$

- Estimation de l'erreur:

$$\max_n |e_n| \leq C(T) \sum_n h_n |\tau_n(h_n)|$$

- Uniformiser l'erreur:

$$C(T)|\tau_n| \leq \epsilon / T$$

de sorte que

$$\max_n |e_n| \leq C(T) \sum_n h_n |\tau_n(h_n)| \leq \sum h_n \frac{\epsilon}{T} \leq \epsilon$$

- Estimation de h_n avec $\tau_n(h_n) \simeq \omega_n h_n^p + O(h_n^{p+1})$:

$$|\tau_n| \leq \frac{\epsilon}{TC(T)} \Longleftrightarrow h_n \lesssim \left(\frac{\epsilon}{TC(T)|\omega_n|} \right)^{1/p}$$

INSA INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES LYON
Pole Math

Résolution d'équations différentielles ordinaires

1. Résolution de systèmes linéaires
2. Résolution d'équations non-linéaires
3. Résolution d'équations différentielles ordinaires
4. Résolution d'équations aux dérivées partielles
   - L'équation de Poisson
   - L'équation de la chaleur
   - L'équation de transport
   - L'équation des ondes

Ce chapitre s'intéresse aux méthodes des différences finies pour la résolution d'équations aux dérivées partielles. On regardera en particulier le cas des équations suivantes :

Equation de Poisson :

$$-\Delta u(x) = f(x)$$

Equation de la chaleur :

$$\partial_t u(x,t) = \Delta u$$

Equation de transport :

$$\partial_t u(x,t) + v.\nabla u = 0$$

Equation des ondes :

$$\partial_{tt}^2 u(x,t) = c^2 \Delta u$$

INSA INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES LYON
Pole Math

Méthodes des différences finies

Approximation des dérivées d'ordre 1 :

Schéma centré :

$$u'(x) = \frac{u(x+h) - u(x-h)}{2h} + O(h^2)$$

Schéma décentré à gauche :

$$u'(x) = \frac{u(x) - u(x-h)}{h} + O(h)$$

Schéma décentré à droite :

$$u'(x) = \frac{u(x+h) - u(x)}{h} + O(h)$$

Approximation des dérivées d'ordre 2 :

$$u''(x) = \frac{u(x+h) - 2u(x) + u(x+h)}{h^2} + O(h^2)$$

Exercice 32

Montrer les approximations précédentes en explicitant les constantes dans les $O(h)$ et $O(h^2)$

L'équation de Poisson

1. Résolution de systèmes linéaires
2. Résolution d'équations non-linéaires
3. Résolution d'équations différentielles ordinaires
4. Résolution d'équations aux dérivées partielles
   - L'équation de Poisson
   - L'équation de la chaleur
   - L'équation de transport
   - L'équation des ondes

Equation de Poisson

On s'intéresse à la résolution numérique de l'équation

$$(P_1) \quad \begin{cases} -u''(x) = f(x) \quad \text{pour} \quad x \in [0,1] \\ u(0) = g_0, \quad u(1) = g_1 \end{cases}$$

Discrétisation de l'intervalle $[0,1]$ avec $N+2$ points :
On pose $x_i = i\,h$ pour $i \in [0, N+1]$ et où $h = \frac{1}{N+1}$.

Approximation numérique de u et f aux noeuds x_i

$$\begin{cases} u_i \simeq u(x_i), \quad u_0 = g_0 \text{ et } u_{N+1} = g_1 \\ f_i = f(x_i) \end{cases}$$

Approximation de l'EDP :

$$-\frac{1}{h^2}\left(u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}\right) = f_i, \quad \forall i = 1 : N$$

INSA INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES LYON
Pole Math

Approximation de l'équation de Poisson

Avec

$$u_h = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{N-1} \\ u_N \end{pmatrix}, b_h = \begin{pmatrix} f_1 + g_0/h^2 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_{N-1} \\ f_N + g1/h^2 \end{pmatrix}, A_h = \frac{1}{h^2} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots \\ -1 & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & \cdots & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

La solution u_h s'obtient en résolvant le système linéaire

$$A_h u_h = b_h.$$

Proposition

La matrice A_h est symétrique définie positive.

Preuve Montrer que $< Z, A_h Z >= \frac{z_1^1 + (z_1 - z_2)^2 + \cdots + (z_{N-1} - z_N)^2 + z_N^2}{h^2}$

Propriétés de la matrice A_h

Exercice 33

Montrer que les vecteurs $\{v^n\}_{n=1:N}$ dont les composantes sont définies par $v_i^n = sin(n\pi x_i)$, sont des vecteurs propres de A_h associés respectivement aux valeurs propres

$$\lambda_h^n = \frac{2}{h^2}\left(1 - cos(n\pi h)\right).$$

En déduire que pour N suffisamment grand, les valeurs propres λ_n de A_h sont comprises entre

$$\lambda_h^1 \simeq \pi^2 \text{ et } \lambda_h^N \simeq \frac{4}{h^2},$$

et que

$$\|A_h\|_2 \simeq \frac{4}{h^2} \quad \text{et} \quad \|A_h^{-1}\|_2 \simeq \frac{1}{\pi^2}.$$

On admet aussi par la suite que

Consistance de la méthode des différences finies

Soit u la solution du problème (P_1) et $\overline{u_h}$ le vecteur défini par $(\overline{u_h})_i = u(x_i)$.

Définition

Le schéma numérique est dit consistant si

$$\Pi_h(u) = A_h\overline{u_h} - b_h \to 0 \quad \text{quand } h \to 0.$$

En particulier, le schéma est d'ordre p pour une norme $\|.\|$ donnée si

$$\|\Pi_h(u)\| \leq Ch^p.$$

Proposition

Supposons que la solution u de (P_1) soit de régularité $C^4([0,1])$. Alors le schéma est consistant d'ordre 2 pour la norme $\|.\|_\infty$, i.e.

$$\|\Pi_h(u)\|_\infty \leq \frac{h^2}{12} \sup_{x\in[0,1]} \left\{|u^{(4)}(x)|\right\}$$

Convergence de la méthode des différences finies

Démonstration : utiliser un développement de Taylor de u :

$$u''(x) = \frac{u(x+h) - 2u(x) + u(x-h)}{h^2} + 2\frac{h^2}{4!}u^{(4)}(\eta_x), \text{ avec } \eta_x \in (x-h, x+h$$

Théorème 27

Supposons que la solution u de (P_1) soit de régularité $C^4([0,1])$.
Alors, le schéma est convergent d'ordre 2 pour la norme $\|.\|_\infty$, i.e.

$$\|u_h - \overline{u}_h\|_\infty \leq \frac{h^2}{96} \sup_{x\in[0,1]} \left\{ |u^{(4)}(x)| \right\}$$

Démonstration :
Utiliser la propriété précédente et $\|A_h^{-1}\|_\infty \leq \frac{1}{8}$

INSA INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES LYON
Pole Math

L'équation de la chaleur

1. Résolution de systèmes linéaires
2. Résolution d'équations non-linéaires
3. Résolution d'équations différentielles ordinaires
4. Résolution d'équations aux dérivées partielles
   - L'équation de Poisson
   - L'équation de la chaleur
   - L'équation de transport
   - L'équation des ondes

Equation de la chaleur

On s'intéresse à la résolution numérique de l'équation de la chaleur

$$(P_2) \quad \begin{cases} \partial_t u(x,t) = \Delta u(x,t) + f(x,t), & \text{pour} \quad (x,t) \in [0,T] \times [0,1] \\ u(x,0) = u_0, \quad \text{pour } x \in [0,1] \\ u(0,t) = u(1,t) = 0, \quad \text{pour } t \in [0,T] \end{cases}$$

- Discrétisation de l'intervalle $[0,1]$ avec $N+2$ points :
  On pose $x_i = i\,h$ pour $i \in [0 : N+1]$ et où $h = \frac{1}{N+1}$.
- Discrétisation de l'intervalle $[0,T]$ avec $M+1$ points :
  On pose $t_n = n\,\delta_t$ pour $n \in [0 : M]$ et où $\delta_t = \frac{1}{M}$.
- Approximation numérique de u et f aux noeuds (x_i, t_n)

$$u_i^n \simeq u(x_i,t_n), \quad f_i^n = f(x_i,t_n), \quad u_0^n = u_{M+1}^n = 0, \text{ et } u_i^0 = u_0(x_i)$$

INSA INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES LYON

Pole Math

Méthode d'Euler explicite

Approximation de l'EDP :

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\delta_t} = \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{h^2} + f_i^n,$$

$\forall (i,n) \in [1:N] \times [0, M-1]$.

Schéma numérique :

$$u_h^{n+1} = (I_d - \delta_t A_h) u_h^n + \delta_t f_h^n,$$

où

$$u_h^n = (u_1^n, u_2^n, \cdots, u_N^n)^t, \text{ et } f_h^n = (f_1^n, f_2^n, \cdots, f_N^n)^t,$$

INSA INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES LYON
Pole Math

Méthode d'Euler explicite

On note $\overline{u}_h^n$ le vecteur défini par $(\overline{u}_h^n)_i = u(x_i, t_n)$ où u est la solution du problème (P_2).

Proposition

Supposons que la solution u de (P_2) soit de régularité $C^2([0,T], C^4([0,1]))$. Alors le schéma est consistant d'ordre 2 en espace et d'ordre 1 en temps pour la norme $\|.\|_\infty$, i.e.

$$\|\Pi_h^n(u)\|_\infty \leq C\left(\delta_t + h^2\right),$$

où

$$\Pi_h^n(u) = (\overline{u}_h^{n+1} - \overline{u}_h^{n+1})/\delta_t + \delta_t A_h \overline{u}_h^n - f_h^n$$

Démonstration : Utiliser un développement de Taylor.

INSA INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES LYON
Pole Math

Proposition

Le schéma d'Euler explicite est L^2-stable sous la condition

$$\delta_t \leq \frac{1}{2} h^2.$$

Démonstration : Regarder les valeurs propres de la matrice $(I_d - \delta_t A_h)$.

INSA INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES LYON
Pole Math

Méthode d'Euler implicite

Approximation de l'EDP :

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\delta_t} = \frac{u_{i+1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i-1}^{n+1}}{h^2} + f_i^{n+1}$$

$\forall (i, n) \in [1 : N] \times [0, M-1]$.

Schéma numérique :

Le vecteur u_h^{n+1} est donc solution du système linéaire

$$(I_d + \delta_t A_h) u_h^{n+1} = u_h^n + \delta_t f_h^{n+1}$$

Exercice 34

On suppose que la solution u de (P_2) est suffisamment régulière. Montrer que le schéma d'Euler implicite est consistant d'ordre 2 en espace et d'ordre 1 en temps et qu'il est inconditionnellement L^2-stable

Schéma de Crank-Nicolson

Approximation de l'EDP :

$$\frac{u_i^{n+1}-u_i^n}{\delta_t} = \left(\frac{u_{i+1}^{n+1}-2u_i^{n+1}+u_{i-1}^{n+1}}{h^2}+f_i^{n+1}\right)/2 + \left(\frac{u_{i+1}^{n}-2u_i^{n}+u_{i-1}^{n}}{h^2}+f_i^{n}\right)/2$$

Schéma numérique :

Le vecteur u_h^{n+1} est donc solution du système linéaire

$$(I_d+\delta_t A_h/2)u_h^{n+1} = (I_d-\delta_t A_h/2)u_h^n + \delta_t\left(f_h^n+f_h^{n+1}\right)/2$$

Exercice 35

On suppose que la solution u de (P_2) est suffisamment régulière. Montrer que le schéma d'Euler implicite est consistant d'ordre 2 en espace et en temps et qu'il est inconditionnellement L^2-stable

L'équation de transport

1. Résolution de systèmes linéaires
2. Résolution d'équations non-linéaires
3. Résolution d'équations différentielles ordinaires
4. Résolution d'équations aux dérivées partielles
   - L'équation de Poisson
   - L'équation de la chaleur
   - L'équation de transport
   - L'équation des ondes

Equation de transport

On s'intéresse à la résolution numérique de l'équation de transport

$$(P_3) \quad \begin{cases} \partial_t u(x,t) + c\partial_x u(x,t) = 0 \\ u(x,0) = u_0 \end{cases}$$

qui a pour solution

$$u(x,t) = u_0(x - ct).$$

Cette équation vérifie en particulier des principes de stabilité qu'on souhaiterait conserver numériquement !

- Stabilité L^∞ :

$$c_0 \leq u_0 \leq c_1 \Longrightarrow c_0 \leq u(x,t) \leq c_1$$

- Stabilité L^2

$$\|u(x,t)\|_2 \leq \|u_0\|_2$$

INSA INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES LYON
Pole Math

Schéma explicite différences finies centré

Schéma numérique :

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\delta_t} + c\frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2h} = 0 \quad \text{avec} \quad u_0^i = u_0(x_i)$$

Ce schéma est inconditionnellement instable et s'avère inutilisable. Il ne vérifie aucun des principes de stabilité précédents !

Exercice 36

Avec $u_0(x) = e^{ipx}$, calculer la solution exacte de $(P3)$ et la solution numérique u_h^n. Remarques ?

INSA INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES LYON
Pole Math

Schéma explicite décentré en amont

Schéma numérique (cas $c > 0$) :

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\delta_t} + c\frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{h} = 0 \quad \text{avec} \quad u_0^i = u_0(x_i)$$

Proposition

Ce schéma est L^∞-stable sous la condition de Courant-Friedrichs-Levy (CFL)

$$c\delta_t \leq h.$$

Démonstration : Montrer que sous la CFL, u_i^{n+1} est une combinaison convexe des $\left\{u_i^n\right\}_{i\in\mathbb{Z}}$.

Exercice 37

Si $u_0 \in C^2(\mathbb{R})$, montrer que le schéma numérique est consistant à l'ordre 1 en temps et en espace!

Résolution d'équations différentielles ordinaires

1. Résolution de systèmes linéaires
2. Résolution d'équations non-linéaires
3. Résolution d'équations différentielles ordinaires
4. Résolution d'équations aux dérivées partielles
   - L'équation de Poisson
   - L'équation de la chaleur
   - L'équation de transport
   - L'équation des ondes

Equation des ondes

- On s'intéresse à la résolution numérique de l'équation des ondes

$$(P_4) \quad \begin{cases} \partial_{tt} u(x,t) = c^2 \Delta u(x,t) \\ u(x,0) = u_0(x) \\ \partial_t u(x,0) = u_0'(x) \end{cases}$$

- Formule de d'Alembert

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left[u_0(x-ct) + u_0(x+ct)\right] + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} u_0'(y)dy$$

- Conservation de l'énergie

$$\mathscr{E}(t) = \frac{1}{2}\int \left((\partial_t u(x,t))^2 + c^2 (\partial_x u(x,t))^2 \right) dxdt$$

INSA INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES LYON

Pole Math

Approche directe explicite

Approximation de l'EDP :

$$\frac{u_i^{n+1} - 2u_i^n + u_i^{n-1}}{\delta_t^2} = c^2 \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{h^2}, \quad \text{et} \quad \begin{cases} u_i^0 & = u_0(x_i) \\ u_i^1 & = u_0(x_i) + \delta_t u_0'(x \end{cases}$$

Schéma numérique :

$$u_h^{n+1} = \left(2I_d - c^2\delta_t^2 A_h\right) u_h^n - u_h^{n-1}.$$

Proposition

On suppose que la solution u de (P_4) est suffisamment régulière. Alors, le schéma est consistant à l'ordre 2 en temps et en espace. Ce schéma est de plus stable sous la condition CFL

$$c\delta_t \leq \frac{h}{2}.$$