Introduction aux probabilités-statistiques
MA3-4GEA

E.Bretin, Z. Smida

INSA INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES LYON
Pole Math

1 Introduction aux probabilités
- Espace de probabilités et dénombrement
- Probabilité conditionnelle et événements indépendants
- Variables aléatoires
- Vecteurs Aléatoires
- Espérance et variance conditionnelle
- Loi normale, théorème central limite et approximation

2 Annexe : Lois de probabilité usuelles
- Lois Discrètes (L.D)
- Lois Continues (L.C)

Introduction

La théorie des probabilités a pour objectif de **modéliser des expériences** où plusieurs résultats sont possibles, mais où leur réalisation n'est pas déterminée à l'avance : lancer de dés, prix d'une action, perturbations sur une ligne téléphonique, files d'attente, etc.
Ceci pour **évaluer les risques** et mettre sur pied **des stratégies** pour "faire face" aux aléas.

Définition 1 (Espace de probabilité)

L'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ *permet de décrire le problème où*

- Ω *représente l'univers, l'espace des observables.*
- $\mathcal{P}(\Omega)$ *représente les parties de* Ω *(dans le cas discret).*
- $\mathbb{P} : \mathcal{P}(\Omega) \to [0, 1]$ *est une probabilité sur* Ω.

Exemples (univers)

1. Pour le jeu de pile ou face, on prendra $\Omega = \{p, f\}$ ou $\Omega = \{0, 1\}$.
2. Pour une suite de 10 lancers d'une pièce, on prendra $\Omega = \{p, f\}^{10}$, l'ensemble des 10-uplets composés de p et de f.
3. Nombre de lancers d'une pièce avant qu'elle ne tombe sur pile $\Omega = \mathbb{N}^*$ (on peut ajouter $+\infty$ à cet ensemble si on le souhaite).
4. Durée de la prochaine communication téléphonique à une cabine $\Omega = \mathbb{R}^+$.

Les ensembles 3. et 4. ne sont pas de cardinaux finis. On pourra remarquer que Ω peut très bien ne pas être un ensemble de nombres.

Vocabulaire

Définition 2

Evènement élémentaire : *un résultat possible de l'expérience aléatoire.*

Exemples

1. lancer d'un dé à 6 faces non pipé :

   $A = \{$obtenir 6 à l'issue du lancer$\}$.

2. tirage d'une carte dans un jeu de 52 cartes :

   $B = \{$tomber sur le "valet de trèfle"$\}$.

3. pile ou face :

   $C = \{$obtenir "pile" lors d'un jet d'une pièce$\}$.

Vocabulaire

Définition 3

Évènement : *sous-ensemble de Ω composé d'évènements élémentaires. Un évènement est représenté par un sous-ensemble de l'univers Ω. Si l'une des issues de l'évènement A est réalisé, on dit que A est réalisé.*

Exemples

1. lancer d'un dé à 6 faces :

   E={obtenir un nombre pair strictement supérieur à 3} ={4, 6}

2. $A = \{$le lancer de dé donne 1, 3 ou 5$\} = \{1, 3, 5\}$.

   Dans cet exemple, si le dé tombe sur 3, on dit que A est réalisé.

Probabilité (cas Ω de cardinal fini)

Définition 4 (Probabilité)

Une probabilité $\mathbb{P}$ est une fonction de $\mathcal{P}(\Omega)$ dans $[0;1]$ telle que :

1. $\mathbb{P}(\Omega) = 1$;
2. $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$ *si A et B sont disjoints.*

Propriété 1

1. $\mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$;
2. $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$;
3. $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A \cap \overline{B})$;
4. $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$;

Exercice 1

Démontrer ces propositions

Dénombrement et équirépartition

Définition 5

On dit que $\mathbb{P}$ est équirépartie sur Ω si pour tout élément $\omega \in \Omega$,

$$\mathbb{P}(\{\omega\}) = \frac{1}{\#\Omega},$$

où $\#\Omega$ représente le cardinal de Ω (nombre d'éléments).

Propriété 2

Si $\mathbb{P}$ est équirépartie sur Ω, alors

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\#A}{\#\Omega}$$

Équirépartition ?

Exercice 2

On s'intéresse au jet de deux dés non pipés, différenciables et dont la modélisation conduit à introduire l'univers suivant

$$\Omega = \{(x_1, x_2), x_i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}\}$$

- *La loi de probabilité associée est-elle équirépartie ?*
- *Combien d'éléments contient* Ω *?*
- *Déterminer la probabilité d'obtenir au moins* 1 *six avec un lancer de* 2 *dés.*

Exercice 3

Même question lorsque les 2 *dés ne sont pas différenciables avec*

$$\Omega = \{(x_1, x_2), x_i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \text{ et } x_1 \leq x_2\}$$

Partition de Ω

Définition 6

Soit $\{A_i\}_{i\in I}$ une partition de Ω si

- $\cup_{i\in I} A_i = \Omega$
- $A_i \cap A_j = \emptyset, \forall (i,j) \in I^2$

Propriété 3

Soit $\{A_i\}_{i\in I}$ une partition de Ω, alors pour tout événement $A \in \mathcal{P}(\Omega)$,

$$P(A) = \sum_{i\in I} P(A \cap A_i)$$

Exercice 4 (Grille)

Un pion se déplace sur une grille case par case suivant les deux directions Est et Nord qui sont prises avec la même probabilité. Si on note $(0,0)$ *sa position de départ, quelle est la probabilité qu'il passe par le point de coordonnées* $(7,3)$ *? Que devient cette probabilité si Est est deux fois plus probable que Nord ?*

Exercice 5 (Paradoxe des anniversaires)

Dans votre classe, quelle est la probabilité que deux personnes fêtent leur anniversaire le même jour ?

Exercice 6 (Poker)

Quelle est la probabilité au Poker d'obtenir un carré ? Et un full ?

Cas en dimension "infinie" : l'ensemble des parties de Ω

Définition 7 (Tribu (σ–algèbre):)

Un ensemble de partie de Ω, $\mathcal{F}$ est une tribu sur Ω s'il satisfait aux trois axiomes:

1. $\emptyset \in \mathcal{F}$.
2. *Si $A \in \mathcal{F}$, alors son complémentaire $A^c = \Omega \setminus A$ est aussi dans $\mathcal{F}$.*
3. *Si on a une suite finie ou dénombrable $A_1, \ldots, A_n, \ldots$ d'éléments de $\mathcal{F}$, alors leur réunion $\bigcup_{n\geq 1} A_n$ est aussi dans $\mathcal{F}$.*

Cas en dimension "infinie" : probabilité

Définition 8 (Probabilité)

Une probabilité $\mathbb{P}$ *est une fonction de* $\mathcal{F}$ *dans* $[0;1]$ *telle que :*

1. $\mathbb{P}(\Omega) = 1$
2. *(Axiome d'additivité dénombrable:) pour toute suite* $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ *d'événements de* $\mathcal{F}$ *qui sont deux à deux incompatibles, alors la série* $\sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(A_k)$ *converge et a pour somme* $\mathbb{P}\left(\bigcup_{k\geq 1} A_k\right)$.

Cas en dimension "infinie" : propriétés

Propriété 4

1. *Si* $A \in \mathcal{F}$, $\mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A)$;
2. $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$;
3. *Si* $A, B \in \mathcal{F}$ *et si* $A \subset B$ *alors* $\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$;
4. *Si* $A, B \in \mathcal{F}$, *alors* $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$;
5. *Si* $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathcal{F}$, *alors* $\mathbb{P}(A_1 \cup \cdots \cup A_n) \leq \mathbb{P}(A_1) + \cdots + \mathbb{P}(A_n)$;
6. *(Continuité croissante) Si* $(A_n)_n$ *est une suite croissante d'événements de* $\mathcal{F}$, *alors* $\lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{n \geq 1} A_n\right)$;
7. *(Continuité décroissante) Si* $(B_n)_n$ *est une suite décroissante d'événements de* $\mathcal{F}$, *alors* $\lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{n \geq 1} A_n\right)$.

1. Introduction aux probabilités
   - Espace de probabilités et dénombrement
   - Probabilité conditionnelle et événements indépendants
   - Variables aléatoires
   - Vecteurs Aléatoires
   - Espérance et variance conditionnelle
   - Loi normale, théorème central limite et approximation

2. Annexe : Lois de probabilité usuelles
   - Lois Discrètes (L.D)
   - Lois Continues (L.C)

Probabilité conditionnelle

Les probabilités conditionnelles ont pour but **d'évaluer "le changement de probabilité"** dû à **l'acquisition d'informations**.

Définition 9

Soient deux événements A et B sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, avec $\mathbb{P}(B) > 0$. La probabilité conditionnelle de A sachant B est

$$\mathbb{P}_B(A) = \mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}.$$

Propriété 5

Soient deux événements A et B sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, avec $\mathbb{P}(B) > 0$ et $\mathbb{P}(A) > 0$, alors

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)}\mathbb{P}(B|A)$$

Évènements indépendants

Définition 10

Deux événements A et B sont indépendants si $\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A)$ ou de manière équivalente lorsque $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$.

Définition 11

Plus généralement, si $(A_n)_n$ est une suite d'événements, $(A_n)_n$ sont indépendants si pour tout ensemble fini d'indices $I \subset \mathbb{N}$, on a $\mathbb{P}\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) = \prod_{i\in I} \mathbb{P}(A_i)$.

Deux propriétés très utiles

Propriété 6 (Formule des probabilités totales)

Soit $\{A_i\}_{i=1,\dots,n}$ *une partition de* Ω*, telle que pour tout* i*,* $\mathbb{P}(A_i) > 0$*. Pour tout* $B \in \mathcal{F}$*,* $\mathbb{P}(B) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(B|A_i)\mathbb{P}(A_i)$*.*

Propriété 7 (Formule de Bayes)

Soit $\{A_i\}_{i=1,\dots,n}$ *une partition de* Ω *telle que pour tout* i*,* $\mathbb{P}(A_i) > 0$*. Pour tout* $B \in \mathcal{F}$ *avec* $\mathbb{P}(B) > 0$*, on a pour tout* $k = 1, \dots, n$ *:*

$$\mathbb{P}(A_k|B) = \frac{\mathbb{P}(B|A_k)\mathbb{P}(A_k)}{\sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(B|A_i)\mathbb{P}(A_i)}.$$

Exercice 7 (Mémoire)

Vous vous rendez chez un ami dont vous savez qu'il a deux enfants, ***mais sans savoir s'il s'agit de fille ou de garçon****. Vous y rencontrez un seul de ces enfants qui est* ***un garçon*** *et s'appelle Jacques.*

- *Le risque d'erreur est-il plus grand si vous demandez à Jacques des nouvelles de son frère ? et de sa sœur ?*
- *Vous savez que, vu son âge, Jacques est le cadet. Cette information change-t-elle la réponse précédente ?*

Exercice 8

Soient A, B deux événements tels que $P(A) = 0.4$ et $P(B) = 0.5$. Calculer $P(\overline{A} \cup B)$, $P(A \cap B|A)$, $P(\overline{A}|B)$ dans les trois cas suivants :

1. *A et B sont disjoints ;*
2. *A et B sont indépendants ;*
3. $\mathbb{P}(A \cup B) = 0.8$.

Exercice 9

Soit Ω un ensemble constitué de m boules blanches et n boules noires. On répartit ces boules entre deux urnes U_1 et U_2. U_1 contient r boules blanches et s boules noires. On attribue la probabilité p à l'urne U_1 et $(1-p)$ à l'urne U_2. Une urne étant choisie, on tire une boule, les divers tirages étant équiprobables. Sachant qu'elle est blanche, déterminer la probabilité pour que cette boule provienne de l'urne U_1.

Exercice 10

Considérons une expérience à 3 issues incompatibles x,y et z de probabilités respectives a, b et 1 – (a + b). L'expérience est répétée jusqu'à apparition de x ou de y. Soit A l'évènement "x sort avant y". Montrer que

$$\mathbb{P}(A) = \frac{a}{a+b}.$$

Pour ce faire, vous conditionnerez A par le résultat de la première expérience.

Exercice 11 (Hémophilie)

On rappelle que le genre de l'individu est déterminé par la paire de chromosomes 23 (XX pour une femme, XY pour un homme) et par conséquent ce genre est déterminé par le chromosome issu de la paire 23 du père (X ou Y). On supposera pour une paire de chromosomes donnée l'équiprobabilité des 4 combinaisons possibles.

L'hémophilie de type A *est une maladie héréditaire due à une anomalie du facteur VIII du chromosome X. Le chromosome anormal est noté* **Xh**. *Cette maladie est surtout visible chez les hommes car les symptômes sont présents chez les individus dont la paire ne comporte aucun chromosome X sain permettant la coagulation du sang. Ainsi* **les hommes XhY et les femmes XhXh sont dites malades**, *alors que* **les femmes XXh sont dites porteuses saines**.

- *Une femme n'est pas hémophile, mais son frère l'est. Par contre, aucun de leurs géniteurs communs n'est hémophile. Quelles peuvent être les combinaisons possibles pour les paires 23 de ses parents ? Quelle est la probabilité qu'elle soit porteuse saine ?*
- *Elle attend un fils. Quelle est la probabilité qu'il soit hémophile ? S'il ne l'est pas, quelles sont les probabilités qu'elle soit porteuse saine et que son prochain fils soit hémophile ?*

1. Introduction aux probabilités
   - Espace de probabilités et dénombrement
   - Probabilité conditionnelle et événements indépendants
   - Variables aléatoires
   - Vecteurs Aléatoires
   - Espérance et variance conditionnelle
   - Loi normale, théorème central limite et approximation

2. Annexe : Lois de probabilité usuelles
   - Lois Discrètes (L.D)
   - Lois Continues (L.C)

Variables Aléatoires, définition

Définition 12

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ *un espace probabilisé.*
Une fonction $X : \Omega \to \mathbb{R}$ *est une* ***variable aléatoire*** *(v.a.) si* $\forall x \in \mathbb{R}$

$$\{X \leq x\} = \{\omega \in \Omega; X(\omega) \leq x\} \in \mathcal{F}$$

En général, on désigne les v.a. par des lettres majuscules.
Si la variable est notée X, alors $X(\Omega)$ désigne l'ensemble des valeurs prises par cette variable aléatoire et correspond au **support** de X.

Loi d'une variable aléatoire discrète

Définition 13

Soit X une v.a. discrète.
$\forall x \in X(\Omega)$,

$$p_X(x) = \mathbb{P}(\{w \in \Omega : X(w) = x\}) = \mathbb{P}(X^{-1}(x)) = \mathbb{P}(X = x)$$

définit la ***loi*** *de X.*

Propriété 8

- $\forall x \in X(\Omega)$, $p_X(x) \geq 0$.
- $\sum_{x \in X(\Omega)} p_X(x) = 1$.

Exemples de variables aléatoires discrètes

Exercice 12

Dans le cas où X correspond à la somme d'un lancer de 2 dés.

- *Que peut-on dire de $X(\Omega)$?*
- *Déterminer $\mathbb{P}(X = i)$, pour $i \in X(\Omega)$.*

Exercice 13

On jette une pièce équilibrée, jusqu'à obtenir pile et on note X le nombre de lancers effectués. X est une v.a. de type dénombrable, susceptible de prendre toutes les valeurs entières non nulles (cf loi géométrique). Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathbb{P}(X = n) = \frac{1}{2^n}.$$

Densité d'une variable aléatoire continue

Définition 14

X peut prendre toute valeur dans un certain intervalle I.
La loi de probabilité de X est donnée par sa ***densité de probabilité*** *qui est une fonction $f_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par la propriété :*

$$\mathbb{P}(a < X < b) = \int_a^b f_X(x)\, dx,$$

pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $a < b$.

Propriété 9

En particulier, il est facile de montrer que

- *f_X est positive.*
- *f_X est intégrable sur $\mathbb{R}$ et* $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\, dx = 1.$

Fonction de répartition d'une variable aléatoire continue

Définition 15

Soit X une variable aléatoire. On note F_X la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x).$$

Propriété 10

Si X est une v.a. continue de densité f_X, alors

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\, dt,$$

et donc $F'_X(x) = f_X(x)$, partout où F est dérivable.

Exemples de variables aléatoires continues

Exercice 14

Soit X une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$ de densité $f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x} \mathbb{1}_{\mathcal{R}^+}(x)$. Montrer que X est variable aléatoire sans mémoire, c'est-à-dire que, pour tous $t > 0$ et $t_0 > 0$,

$$P(X \leq t + t_0 \mid X \geq t_0) = P(X \leq t).$$

Exercice 15

Soit X une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0, 1]$ de densité $f_X(x) = \mathbb{1}_{[0,1]}(x)$.

- *Déterminer la fonction de répartition $F_X(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.*
- *Calculer la fonction de répartition de $Y = -\frac{1}{\lambda} \ln(X)$, $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$.*

Espérance d'une variable aléatoire

Définition 16 (Cas d'une variable aléatoire discrète)

Soit X une variable aléatoire discrète (avec $X(\Omega) = \{x_i\}_{i\in I}$), alors l'espérance de X notée $\mathbb{E}[X]$ est définie par :

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{i\in I} x_i P(X = x_i)$$

(sous réserve de convergence).

Définition 17 (Cas d'une variable aléatoire continue)

Soit X une variable aléatoire continue, alors l'espérance de X notée $\mathbb{E}[X]$ est définie par :

$$\mathbb{E}[X] = \int_{\mathbb{R}} x\, f_X(x)\mathrm{d}x$$

Propriété de l'espérance

Propriété 11

Soit X une variable aléatoire et $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction quelconque, alors l'espérance de $Y = \varphi(X)$ vérifie

$$\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}[\varphi(X)] = \begin{cases} \sum_{i \in I} \varphi(x_i) P(X = x_i) & \text{si } X \text{ est une v.a discrète} \\ \int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\, f_X(x) \mathrm{d}x & \text{si } X \text{ est une v.a continue} \end{cases}$$

En particulier, si X est une variable aléatoire et $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, alors

$$\mathbb{E}[aX + b] = a\mathbb{E}[X] + b.$$

Variance d'une variable aléatoire

Définition 18

Soit X une variable aléatoire admettant une espérance. La variance de X correspond à une mesure de sa dispersion autour de son espérance :

$$\mathbb{V}[X] = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2]$$

(sous réserve de convergence).

Propriété 12

Soient X une variable aléatoire admettant une espérance alors

$$\mathbb{V}[X] = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2$$

Propriété 13

Soient X une variable aléatoire admettant une espérance et soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ alors

$$\mathbb{V}[aX + b] = a^2\mathbb{V}[X]$$

Inégalité de Tchebychev

Propriété 14

Soit X une variable aléatoire d'espérance $\mu = E(X)$ et de variance finie $\sigma^2 = V(X)$. Alors pour tout réel strictement positif ε:

$$P(|X - \mu| \geq \varepsilon) \leq \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$$

Preuve

On s'intéresse au cas continu, le cas discret étant similaire :

$$\begin{aligned} P(|X - \mu| \geq \varepsilon) &= \int_{|x-\mu|\geq\varepsilon} f_X(x)\mathrm{d}x \\ &= \int_{|x-\mu|\geq\varepsilon} \frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2} f_X(x)\mathrm{d}x \\ &\leq \int_{\mathbb{R}} \frac{(x-\mu)^2}{\varepsilon^2} f_X(x)\mathrm{d}x = \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2} \end{aligned}$$

Exemples

Exercice 16

Déterminer l'espérance et la variance d'une variable aléatoire correspondant au lancer d'un dé à 6 faces non pipé.

Exercice 17

On jette une pièce équilibrée, jusqu'à obtenir pile et on note X le nombre de lancers effectués. Déterminer le nombre moyen de lancers effectués dans cette expérience.

Exercice 18

Soit X une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0, 1]$. Déterminer l'espérance et la variance de X.

Exemples

Exercice 19

Quelqu'un joue 1000 *fois à pile ou face avec une pièce équilibrée. Minorer sa probabilité d'obtenir entre* 480 *et* 520 *faces à l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev puis comparer le résultat obtenu avec celui que donne la loi binomiale.*

Fonction caractéristique

Définition 19

La fonction caractéristique d'une variable aléatoire réelle X est la fonction à valeurs complexes définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\varphi_X(t) = \mathbb{E}(e^{itX}).$$

Remarque 1

Dans le cas d'une variable aléatoire continue, la fonction caractéristique est la transformée de Fourier inverse de la densité

$$\varphi_X(t) = \mathbb{E}(e^{itX}) = \int_{\mathbb{R}} f_X(x) e^{itx} \mathrm{d}x$$

Propriété 15

$$\varphi'_X(0) = i\mathbb{E}(X) \quad \text{et} \quad \varphi''_X(0) = -\mathbb{E}(X^2)$$

Fonction caractéristique

Exercice 20

Déterminer la fonction caractéristique d'une loi normale $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$ de densité

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}.$$

Exercice 21

Déterminer la fonction caractéristique d'une loi exponentielle $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$ de densité

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Introduction aux probabilités
   - Espace de probabilités et dénombrement
   - Probabilité conditionnelle et événements indépendants
   - Variables aléatoires
   - Vecteurs Aléatoires
   - Espérance et variance conditionnelle
   - Loi normale, théorème central limite et approximation

2. Annexe : Lois de probabilité usuelles
   - Lois Discrètes (L.D)
   - Lois Continues (L.C)

Couples aléatoires

Lorsque le résultat d'une expérience aléatoire est décrit par une suite de n variables aléatoires alors cette suite constitue un vecteur aléatoire de dimension n.
Pour $n = 2$, on parle de couple de variables aléatoires.

Définition 20

Un couple aléatoire (X, Y) *est une application*

$$(X, Y) : \begin{cases} \Omega & \to \mathbb{R}^2 \\ \omega & \to (X(\omega), Y(\omega)), \end{cases}$$

$\forall \omega \in \Omega$, $(X(\omega), Y(\omega))$ *est une réalisation du couple* (X, Y).

Loi d'un couple de variables aléatoires discrètes

Soient (X, Y) deux variables aléatoires discrètes telles que $X(\Omega) = \{x_i\}_{i\in I}$ et $Y(\Omega) = \{y_j\}_{j\in J}$.

Définition 21 (Loi conjointe)

*La **loi conjointe** du couple (X, Y) est définie $\forall (i, j) \in I \times J$ par*

$$p_{(X,Y)}(x_i, y_j) = \mathbb{P}(X = x_i, Y = y_j).$$

Définition 22 (Loi marginale)

*Les **lois marginales** de X et de Y sont définies $\forall i \in I$ et $\forall j \in J$ par*

$$p_X(x_i) = \sum_{j\in J} \mathbb{P}(X = x_i, Y = y_j),$$

et

$$p_Y(y_j) = \sum_{i\in I} \mathbb{P}(X = x_i, Y = y_j).$$

Exercice 22

En terminant d'effeuiller une marguerite, on compte 0 *point pour "pas du tout",* 1 *point pour "un peu",* 3 *points pour "beaucoup",* 5 *points pour "passionnément",* 10 *points pour "à la folie". On effeuille successivement deux marguerites. Soit X la v.a. égale au nombre de points obtenus avec la première marguerite. Soit Y la v.a. égale au maximum des deux nombres obtenus.*

- *Déterminer la loi du couple (X, Y)*
- *Préciser les lois marginales de X et de Y .*

Loi d'un couple de variables aléatoires continues

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires continues.

Définition 23 (Fonction de densité conjointe)

La loi du couple (X, Y) est donnée par la fonction densité de probabilité $f_{(X,Y)}$ telle que : $\forall A \subset \mathbb{R}^2$

$$P((X, Y) \in A) = \iint_A f_{(X,Y)}(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Propriété 16

La fonction densité de couple $f_{(X,Y)}$ vérifie $f_{(X,Y)} \geq 0$ et

$$\iint_{\mathbb{R}^2} f_{(X,Y)}(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 1.$$

Loi marginale d'un couple de variables aléatoires continues

Définition 24 (Fonction de densité marginale)

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires continues. Alors, les densités marginales de X et de Y sont définies par :

$$f_X(x) = \int_{\mathbb{R}} f_{(X,Y)}(x, y)\mathrm{d}y,$$

et

$$f_Y(y) = \int_{\mathbb{R}} f_{(X,Y)}(x, y)\mathrm{d}x.$$

Exercice 23

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires de densité

$$f_{(X,Y)}(x, y) = \begin{cases} \frac{3y}{a^3} & \text{si } (x, y) \in [0, a]^2 \text{ et } y \geq x \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Déterminer les lois marginales de X et de Y.

Espérance

Propriété 17 (Théorème de transfert)

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires et $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction quelconque, alors

- *si (X, Y) est discret*

$$\mathbb{E}[\varphi(X, Y)] = \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} \varphi(x_i, y_j) \mathbb{P}(X = x_i, Y = y_j)$$

- *si (X, Y) est continu*

$$\mathbb{E}[\varphi(X, Y)] = \iint_{\mathbb{R}^2} \varphi(x, y) f_{(X,Y)}(x, y) \mathrm{d}x \mathrm{d}y.$$

Espérance, covariance et variance

Définition 25

Soient X et Y deux variables aléatoires admettant toutes les deux une espérance mathématique. On appelle covariance de X et Y le réel défini par

$$Cov(X,Y) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}(X))(Y - \mathbb{E}(Y))] = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y).$$

Propriété 18

Soient X et Y deux variables aléatoires et α et β deux réels. Alors,

- $\mathbb{E}[\alpha X + \beta Y] = \alpha\,\mathbb{E}[X] + \beta\,\mathbb{E}[Y]$
- $\mathbb{V}(\alpha X + \beta Y) = \alpha^2\mathbb{V}(X) + 2\alpha\beta Cov(X,Y) + \beta^2\mathbb{V}(Y)$

Indépendance, définition

Définition 26

Deux variables aléatoires sont dites indépendantes si pour toutes parties A et B de $\mathbb{R}$,

$$P((X,Y) \in A \times B) = P(X \in A) \times P(Y \in B).$$

Propriété 19

Deux variables aléatoires X et Y sont indépendantes si et seulement si :

- *si (X,Y) est discret :*

$$\forall (i,j) \in I \times J, \quad p_{(X,Y)}(x_i, y_j) = p_X(x_i) p_Y(y_j)$$

- *si (X,Y) est continu :*

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f_{(X,Y)}(x,y) = f_X(x) f_Y(y).$$

Minimum de variables aléatoires indépendantes

Exercice 24

Soit (X_1, X_2) deux variables indépendantes et équi-distribuées de loi uniforme sur $[0, 1]$. Déterminer la loi de la variable aléatoire Y définie par $Y = \min(X_1, X_2)$.

Exercice 25

On considère n variables aléatoires indépendantes X_i, de lois exponentielles de paramètre $\lambda_i > 0$.

1) *On note $Z = min(X_i)$. Calculez la fonction de répartition de Z et déduisez-en la loi de Z.*
2) *La durée de vie de composants électroniques suit une distribution exponentielle. Un dispositif comporte 3 composants de durées de vie moyenne respectives $1000h$, $1200h$, $1500h$, montés en série. Quelle est la durée de vie moyenne du dispositif ?*

Indépendance, propriétés

Propriété 20

Soit X, Y deux variables indépendantes, alors pour toutes fonctions $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$\mathbb{E}[\phi(X)\psi(Y)] = \mathbb{E}[\phi(X)]\mathbb{E}[\psi(Y)].$$

Propriété 21

Si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes, alors

- *leur covariance est nulle et, pour tous réels α et beta :*

$$\mathbb{V}(\alpha X + \beta Y) = \alpha^2 \mathbb{V}(X) + \beta^2 \mathbb{V}(Y)$$

- *la fonction caractéristique de la somme vérifie*

$$\varphi_{X+Y}(t) = \varphi_X(t)\varphi_Y(t)$$

- *la densité de la somme vérifie $f_{X+Y}(z) = f_X * f_Y(z)$.*

Somme de variables aléatoires indépendantes

Exercice 26

Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires de loi uniforme sur $[0,1]$, indépendante. Déterminer la densité et la fonction caractéristique de $Z = X_1 + X_2$.

Exercice 27

Soit (X_i) une suite de lois de Bernoulli de paramètre p indépendantes. On rappelle que X suit une loi de Bernoulli si $X \in \{0,1\}$ avec $P(X=1) = p$ et $P(X=0) = 1-p$.

- *Déterminer l'espérance et la variance de X.*
- *En déduire l'espérance et la variance de $Y = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ en fonction de n. Que peut-on en déduire ?*

1. Introduction aux probabilités
   - Espace de probabilités et dénombrement
   - Probabilité conditionnelle et événements indépendants
   - Variables aléatoires
   - Vecteurs Aléatoires
   - Espérance et variance conditionnelle
   - Loi normale, théorème central limite et approximation

2. Annexe : Lois de probabilité usuelles
   - Lois Discrètes (L.D)
   - Lois Continues (L.C)

Espérance conditionnelle

Définition 27

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires, soit h définie par

- *Cas discret :*

$$h(y_j) = \mathbb{E}[X|Y = y_j] = \frac{1}{p_Y(y_i)} \sum_{i \in I} x_i p_{(X,Y)}(x_i, y_j)$$

- *Cas continu :*

$$h(y) = \mathbb{E}[X|Y = y] = \frac{1}{f_Y(y)} \int_{\mathbb{R}} x f_{(X,Y)}(x, y) \mathrm{d}x$$

Alors, l'espérance conditionné $\mathbb{E}[X|Y]$ est la variable aléatoire définie par $\mathbb{E}[X|Y] = h(Y)$.

Propriété 22 (Formule d'espérance totale)

$$\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[X|Y]]$$

Variance conditionnelle

Définition 28

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires, soit g définie par

$$g(y) = \mathbb{V}[X|Y = y] = \mathbb{E}[X^2|Y = y] - \mathbb{E}[X|Y = y]^2.$$

Alors, la variance conditionnée $\mathbb{V}[X|Y]$ s'identifie à la variable aléatoire définie par $\mathbb{V}[X|Y] = g(Y)$.

Propriété 23 (Théorème de la variance totale)

$$\mathbb{V}[X] = \mathbb{E}[\mathbb{V}[X|Y]] + \mathbb{V}[\mathbb{E}[X|Y]]$$

Applications

Exercice 28 (Deux pièces ou plus)

Vous disposez de pièces (deux au départ) dont les deux faces sont numérotées 0 *et* 1*.*

- *Le premier tirage se fait avec deux pièces, son résultat vous est inconnu. Vous devez faire un pari sur la somme* S_1 *obtenue en additionnant les faces des deux pièces. Quel est votre pari le plus raisonnable et quel est votre risque d'erreur ?*
- *Un deuxième tirage a lieu avec* $n = 2 + s_1$ *pièces et on note* S_2 *le résultat obtenu. Calculez* $P(S_1 = 1 | S_2 = 2)$
- *Calculer* $\mathbb{E}[S_2]$ *et* $\mathbb{V}[S_2]$

Applications

Exercice 29 (Assurance)

Une assurance doit rembourser un nombre aléatoire N de sinistres (supposés indépendants). Le montant X d'un sinistre est aléatoire et sa distribution est supposée commune à l'ensemble des sinistres. Calculer l'espérance et l'écart type du montant total T des sinistres en fonction des moments de X et de N.

1. Introduction aux probabilités
   - Espace de probabilités et dénombrement
   - Probabilité conditionnelle et événements indépendants
   - Variables aléatoires
   - Vecteurs Aléatoires
   - Espérance et variance conditionnelle
   - Loi normale, théorème central limite et approximation

2. Annexe : Lois de probabilité usuelles
   - Lois Discrètes (L.D)
   - Lois Continues (L.C)

Convergence presque sûre

Définition 29 (Convergence presque sûre)

On dit que (X_n) converge presque sûrement vers X si

$$P(lim_{n\to\infty} X_n = X) = 1,$$

ou de manière équivalente, s'il existe un ensemble négligeable $N \subset \Omega$ tel que

$$\forall \omega \in \Omega \setminus N, \quad X_n(\omega) \to X(\omega).$$

Loi des grands nombres

Théorème 1

Soit une suite $\{X_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ *de variables aléatoires indépendantes qui suivent la même loi de probabilité, intégrables (c'est à dire* $\mathbb{E}(|X_i|) < \infty$*). Alors*

$$\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

converge vers $\mathbb{E}(X)$ *presque sûrement.*

Convergence en probabilité

Définition 30 (Convergence en probabilité)

On dit que $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers* X *en probabilité si* $\forall \varepsilon > 0$,

$$\lim_{n\to\infty} P(|X_n - X| \leq \varepsilon) = 1.$$

Théorème 2

Soit X *une variable aléaoiter admettant une variance. Soit* $\{X_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ *de variables aléatoires indépendantes de même loi que* X*. Alors*

$$\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

converge en probabiité vers $\mathbb{E}(X)$.

Convergence en loi

Définition 31 (Convergence en loi)

On dit que $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers X en loi si pour fonction g à valeur réelles, continue et bornée

$$lim_{n\to\infty}\mathbb{E}[g(X_n)] = \mathbb{E}[g(X)].$$

En particulier, dans le cas continu, on en déduit que

$$lim_{n\to\infty}\int g(x)f_{X_n}(x)\mathrm{d}x = \int g(x)f_X(x)\mathrm{d}x.$$

Théorème 3 (Théorème de Lévy)

Si φ_n est la fonction caractéristique de X_n, et φ celle de X, alors (X_n) converge vers X en loi si et seulement si $\lim_{n\to+\infty}\varphi_n(t) = \varphi(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Théorème central limite

Théorème 4 (TCL)

Soit (X_i) une suite de variables aléatoires réelles, indépendantes et identiquement distribuées suivant la même loi d'espérance μ et de variance finie $\sigma^2 \neq 0$. Alors la suite de variable aléatoire U_n définie par

$$U_n = \frac{\overline{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}$$

converge en loi vers une variable aléatoire U de loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0,1)$.

Théorème central limite

Preuve

L'idée est d'utiliser la fonction caractéristique φ_X d'une variable aléatoire X:

$$\varphi_X(t) = \mathbb{E}[e^{itX}] = 1 + it\mathbb{E}[X] - \frac{t^2}{2}(\mathbb{V}[X] + \mathbb{E}(X)^2) + o(t^2).$$

Alors, en remarquant que $U_n = \sum_{i=1}^n \frac{Y_i}{\sqrt{n}}$ où $\mathbb{E}[Y_i] = 0$ et $\mathbb{V}[Y_i] = 1$, on en déduit que

$$\begin{aligned} \varphi_{U_n}(t) &= \mathbb{E}[e^{it\sum_{i=1}^n \frac{Y_i}{\sqrt{n}}}] = \prod_{i=1}^n \varphi_{Y_i}(t/\sqrt{n}) \\ &= \left(1 - \frac{t^2}{2n} + o(t^2/n)\right)^n \to e^{-t^2/2} \end{aligned}$$

qui correspond bien à la fonction caractéristique d'une loi normale centrée réduite.

Propriété de la loi normale

Propriété 24 (Fonction caractéristique)

Soit X une loi normale d'espérance μ et de variance σ^2, alors

$$\varphi_X(t) = e^{i\mu t - \frac{\sigma^2 t^2}{2}}.$$

Propriété 25 (Stabilité de la loi normale)

Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes de loi normale $X_1 \sim \mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1)$ et $X_2 \sim \mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2)$, et α et β deux réels alors

$$\alpha X_1 + \beta X_2 \sim \mathcal{N}\left(\alpha\mu_1 + \alpha\mu_2, \sqrt{\alpha^2\sigma_1^2 + \beta^2\sigma_2^2}\right).$$

Applications

Exercice 30 (Dés)

On lance 30 *fois de suite un dé.*

1) *Quelle est la probabilité que la somme X obtenue soit supérieure ou égale à* 100 *?*
2) *Un autre joueur lance* 32 *fois de suite un dé. On note Y la somme obtenue. Quelle est la probabilité de l'évènement* $X \leq Y$ *?*

Exercice 31 (Crible)

La taille d'une pièce extraite au hasard d'une production suit une loi normale. On passe les pièces dans deux cribles de dimension 42.00 *mm et* 40.05 *mm. On observe que* 90.3% *et* 34.7% *des pièces passent respectivement dans ces cribles. Déduisez-en* μ *et* σ*.*

Applications

Exercice 32

1) *On désire construire une voie de garage de longueur 450m dans un chantier. La longueur d'un rail est égale à* $l_n = 9m \pm 0.03m$. *Quel est l'incertitude donnée sur la longueur totale de la voie par un calcul traditionnel ?*
2) *On sait que la longueur d'un rail suit une loi de normale. Quel nouveau calcul d'incertitude peut se substituer au précédent ?*

Loi de Poisson, phénomène rare

Propriété 26

Soit $S_n \sim \mathcal{B}(n, \lambda/n)$ une suite de variable de loi Binomiale. Alors S_n converge en loi vers une loi de Poisson de paramètre λ

Preuve

Il suffit de remarquer que $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$ où $X_k \sim \mathcal{B}(\lambda/n)$ est une suite de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées avec

$$\varphi_{S_n}(t) = \Pi_{i=1}^{n} \varphi_{X_k}(t) = \left(1 + \frac{\lambda}{n}(e^{it} - 1)\right)^n \to e^{\lambda(e^{it}-1)},$$

qui correspond bien à la fonction caractéristique d'une loi de Poisson de paramètre λ.

Application

Exercice 33

Une installation est équipée d'un éclairage continu constitué de 1000 *ampoules dont la durée de fonctionnement suit une loi exponentielle d'espérance* 1200 *heures. Un technicien fait le tour de l'installation tous les jours pour remplacer les lampes défectueuses.*

- *Combien le technicien doit-il emporter d'ampoules dans sa tournée quotidienne pour être à peu près sûr de ne pas manquer d'ampoules?*
- *Si le technicien était absent pendant 5 jours, quel serait en moyenne le pourcentage d'ampoules encore en fonctionnement ?*

1. Introduction aux probabilités
   - Espace de probabilités et dénombrement
   - Probabilité conditionnelle et événements indépendants
   - Variables aléatoires
   - Vecteurs Aléatoires
   - Espérance et variance conditionnelle
   - Loi normale, théorème central limite et approximation

2. Annexe : Lois de probabilité usuelles
   - Lois Discrètes (L.D)
   - Lois Continues (L.C)

Loi de Bernoulli (L.D)

Définition 32

On considère une expérience qui se traduit par un ***succès*** *avec une probabilité p ou par un* ***échec*** *avec la probabilité* $1 - p$. *On note X la v.a. définie par :*

$$X = \begin{cases} 1 & \text{si c'est un succès} \\ 0 & \text{si c'est un échec} \end{cases}$$

On dit que X suit une ***loi de Bernoulli*** *de paramètre p et on note :*

$$X \sim \mathcal{B}(p).$$

Sa ***loi de probabilité*** *est définie par :*

$$P(X = 0) = 1 - p \text{ et } P(X = 1) = p.$$

Propriété 27

L'espérance *et la* ***variance*** *de* $X \sim \mathcal{B}(p)$ *sont données par :*

$$\mathbb{E}(X) = p \text{ et } \mathbb{V}(X) = p(1 - p).$$

Loi Binomiale (L.D)

Définition 33

On répète de façon indépendante n fois une expérience de Bernoulli dont la probabilité de succès est p. La loi de la v.a. X qui compte le ***nombre de succès*** *sur ces n expériences indépendantes est appelée* ***loi Binomiale*** *de paramètres n et p, ce que l'on note :*

$$X \sim \mathcal{B}in(n, p).$$

Elle prend ses valeurs dans $\{0, 1, \ldots, n\}$ *et sa* ***loi de probabilité*** *est définie par :*

$$\forall k \in \{0, 1, \ldots, n\}, \quad P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

Propriété 28

L'espérance *et la* ***variance*** *de* $X \sim \mathcal{B}in(n, p)$ *sont données par :*

$$\mathbb{E}(X) = np \text{ et } \mathbb{V}(X) = np(1-p).$$

Loi de Poisson (L.D)

Définition 34

*La **loi de Poisson** de paramètre λ apparaît comme la limite lorsque $n \to +\infty$, de la loi binomiale $\mathcal{B}in(n, \lambda/n)$, où λ est un réel strictement positif. Une v.a. X suivant la loi de Poisson prend ses valeurs dans $\mathbb{N}$. On dit que X suit une **loi de Poisson** de paramètre λ et l'on note :*

$$X \sim \mathcal{P}(\lambda).$$

*Sa **loi de probabilité** est définie par :*

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}.$$

Propriété 29

***L'espérance** et la **variance** de $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ sont données par :*

$$\mathbb{E}(X) = \lambda \text{ et } \mathbb{V}(X) = \lambda.$$

Loi géométrique (L.D)

Définition 35

*Une v.a. X qui suit une **loi géométrique** de paramètre p prend ses valeurs dans $\mathbb{N}^* = \{1, 2, \ldots, n, \ldots\}$ et on note :*

$$X \sim \mathcal{G}(p).$$

*Sa **loi de probabilité** est donnée par :*

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad P(X = k) = p(1-p)^{k-1}.$$

C'est la loi du temps d'attente du premier succès dans une succession d'épreuves de Bernoulli indépendantes.

Propriété 30

***L'espérance** et la **variance** de $X \sim \mathcal{G}(p)$ valent respectivement*

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{p} \text{ et } \mathbb{V}(X) = \frac{1-p}{p^2}.$$

1. Introduction aux probabilités
   - Espace de probabilités et dénombrement
   - Probabilité conditionnelle et événements indépendants
   - Variables aléatoires
   - Vecteurs Aléatoires
   - Espérance et variance conditionnelle
   - Loi normale, théorème central limite et approximation

2. Annexe : Lois de probabilité usuelles
   - Lois Discrètes (L.D)
   - Lois Continues (L.C)

Loi uniforme (L.C)

Définition 36

*Une v.a. X qui suit la **loi uniforme** sur l'intervalle $I = [a, b]$, notée*

$$X \sim U[a, b],$$

*prend ses valeurs dans tout l'intervalle I et sa loi de probabilité est définie par la **densité de probabilité** :*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{si } a \leq x \leq b \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

C'est la loi exacte des phénomènes continus uniformément répartis sur un intervalle.

Propriété 31

*Son **espérance** et sa **variance** sont données par :*

$$\mathbb{E}(X) = \frac{a+b}{2} \text{ et } \mathbb{V}(X) = \frac{(a-b)^2}{12}.$$

Loi exponentielle (L.C)

Définition 37

Soit $\lambda \in \mathbb{R}_+$, une v.a. X qui suit la ***loi exponentielle*** *de paramètre λ, notée*

$$X \sim \mathcal{E}(\lambda),$$

est une v.a. continue à valeurs dans $\mathbb{R}_+$. Sa ***densité de probabilité*** *est donnée par :*

$$f(x) = \begin{cases} 0 & si\ x < 0 \\ \lambda e^{-\lambda x} & si\ x \geq 0. \end{cases}$$

C'est la loi du temps d'attente d'un phénomène poissonien de taux λ : temps d'attente du premier évènement ou intervalle de temps entre deux évènements consécutifs.
Dans certaines situations on parle de durée de vie.

Propriété 32

Son ***espérance*** *et sa* ***variance*** *sont données par :*

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{\lambda} \text{ et } \mathbb{V}(X) = \frac{1}{\lambda^2}.$$

Loi de Erlang

Définition 38

Soit $k \in \mathbb{N}^*$ et $\lambda \in \mathbb{R}_+$. Une v.a. X qui suit la ***loi de Erlang*** *de paramètres λ, notée*

$$X \sim Erl(k, \lambda),$$

est une v.a. continue à valeurs dans $\mathbb{R}_+$. Sa ***densité de probabilité*** *est donnée par :*

$$f(x) = \frac{\lambda^k x^{k-1} \exp(-\lambda x)}{(k-1)!} \text{ pour } x \geq 0.$$

Propriété 33

La distribution d'Erlang est la distribution de la somme de k variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées selon une loi exponentielle de paramètre λ Son ***espérance*** *et sa* ***variance*** *sont données par :*

$$\mathbb{E}(X) = k/\lambda \text{ et } \mathbb{V}(X) = k/\lambda^2.$$

Loi normale ou loi Gaussienne (L.C)

Définition 39

Soit $\mu \in \mathbb{R}, \sigma \in \mathbb{R}_+$. Une v.a. X qui suit la ***loi normale*** *de paramètres μ et σ, notée*

$$X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma),$$

est une v.a. continue à valeurs dans $\mathbb{R}$. Sa ***densité de probabilité*** *est donnée par :*

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}.$$

Propriété 34

Son ***espérance*** *et sa* ***variance*** *sont données par :*

$$\mathbb{E}(X) = \mu \text{ et } \mathbb{V}(X) = \sigma^2.$$

De très nombreuses distributions naturelles sont approximées par la loi normale.

INSA INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES LYON
Pole Math

Loi de Rayleigh

Définition 40

Soit $\sigma \in \mathbb{R}_+$. Une v.a. X qui suit la ***loi de Rayleigh*** *de paramètres σ, notée*

$$X \sim \mathcal{R}(\sigma),$$

est une v.a. continue à valeurs dans $\mathbb{R}_+$. Sa ***densité de probabilité*** *est donnée par :*

$$f(x) = \frac{x}{\sigma^2} \exp\left(\frac{-x^2}{2\sigma^2}\right) \text{ pour } x \geq 0.$$

Propriété 35

Son ***espérance*** *et sa* ***variance*** *sont données par :*

$$\mathbb{E}(X) = \sigma\sqrt{\pi/2} \text{ et } \mathbb{V}(X) = \frac{4-\pi}{2}\sigma^2$$

Loi de Weibull

Définition 41

Soient $\beta > 0$ et $\Sigma > 0$. Une v.a. X qui suit la ***loi de Weibull*** *de paramètres β et σ, notée*

$$X \sim Weib(\beta, \sigma),$$

est une v.a. continue à valeurs dans $\mathbb{R}_+$. Sa ***densité de probabilité*** *est donnée par :*

$$f(x) = \frac{\beta}{\sigma}\left(\frac{x}{\sigma}\right)^{\beta-1} \exp\left(-\left(\frac{x}{\sigma}\right)^{\beta}\right) \text{ pour } x \geq 0.$$

Propriété 36

Son ***espérance*** *et sa* ***variance*** *sont données par :*

$$\mathbb{E}(X) = \sigma\Gamma(1 + 1/\beta) \text{ et } \mathbb{V}(X) = \sigma^2(\Gamma(1 + 2/\beta) - \Gamma(1 + 1/\beta)^2)$$