Recherche Opérationnelle : MA4-5GE

E. Bretin, S. Thery et N. Rosenstiehl

INSA INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES LYON
Pole Math

1 Algorithme d'optimisation sur graphe
- Algorithme du plus court chemin
- Le problème du flot maximal
- Problème d'affectation

2 Programmation linéaire
- Principe de l'algorithme du simplexe
- Cas particuliers
- Dualité

3 Chaînes de Markov
- Chaînes de Markov discrètes
- Chaînes de Markov Continue
- Application aux files d'attente

Motivations

Les graphes apparaissent naturellement lorsqu'on se confronte à un **réseau** (réseau de transport, réseau informatique, réseau d'eau ou de gaz, etc.). Parmi les questions qui se posent naturellement, on peut mentionner :

- comment **parcourir le réseau** de manière optimale ?
- comment concevoir un **réseau informatique robuste** tout en minimisant le **nombre de connexions** ?

D'autres questions impliquent des graphes de manière plus **subtile**, où la modélisation du problème conduit à un graphe dont la structure n'est pas physique. Deux exemples classiques sont :

- le problème **d'affectation optimale** d'employés à des tâches ;
- le **problème d'ordonnancement**, où les sommets représentent des tâches et les arcs les relations de précédence.

L'objectif ici est de proposer un certain nombre d'algorithmes pour répondre à ces questions.

Modélisation et graphes orientés

Définition 1

Un graphe orienté $G = (X, U)$ est défini par un ensemble de sommets X et un ensemble d'arcs $U \subset X \times X$.

Définition 2

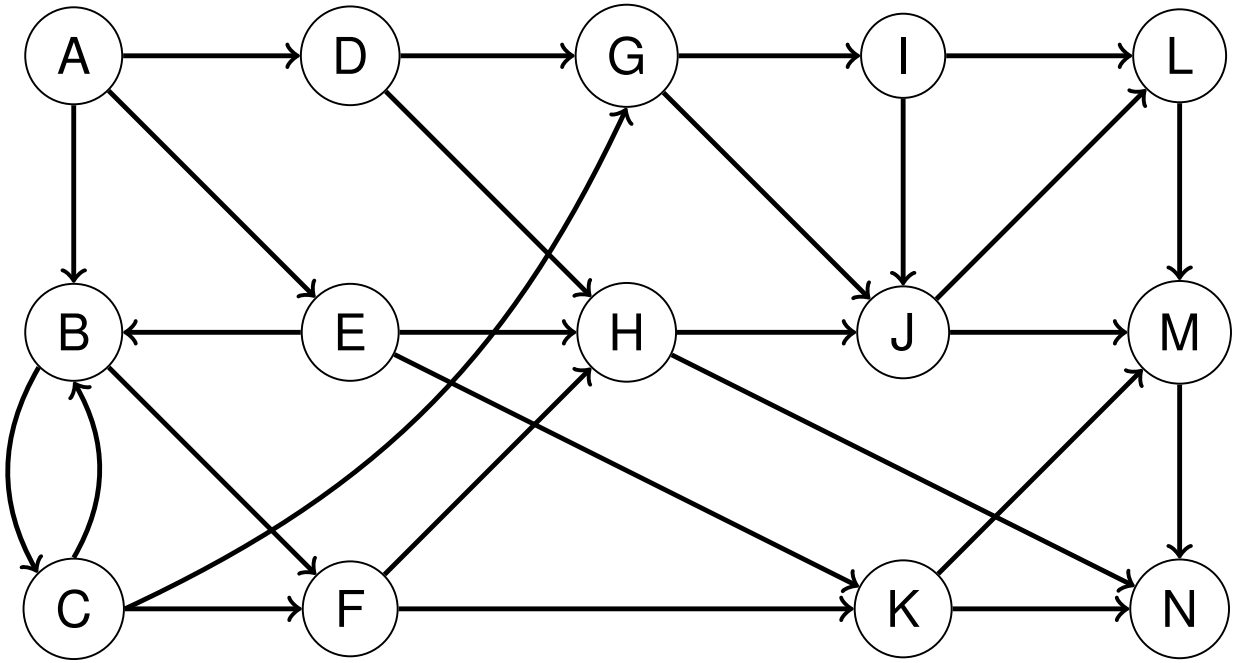
Un chemin est une suite de la forme $x_0, u_1, x_1, u_2, \ldots, x_{k-1}, u_k, x_k$, où k est la longueur du chemin, $x_i \in X$, et $u_i = (x_{i-1}, x_i) \in U$. Si les u_i sont distincts deux à deux, le chemin est dit simple.

Définition 3

- *Un chemin simple passant par tous les arcs d'un graphe est dit eulérien.*
- *Un chemin simple passant par tous les sommets d'un graphe est dit Hamiltonien.*

Le réseau

- **Représentation graphique**



- **Ce que l'ordinateur peut stocker :** (matrice, liste)

1. Algorithme d'optimisation sur graphe
   - Algorithme du plus court chemin
   - Le problème du flot maximal
   - Problème d'affectation
2. Programmation linéaire
   - Principe de l'algorithme du simplexe
   - Cas particuliers
   - Dualité
3. Chaînes de Markov
   - Chaînes de Markov discrètes
   - Chaînes de Markov Continue
   - Application aux files d'attente

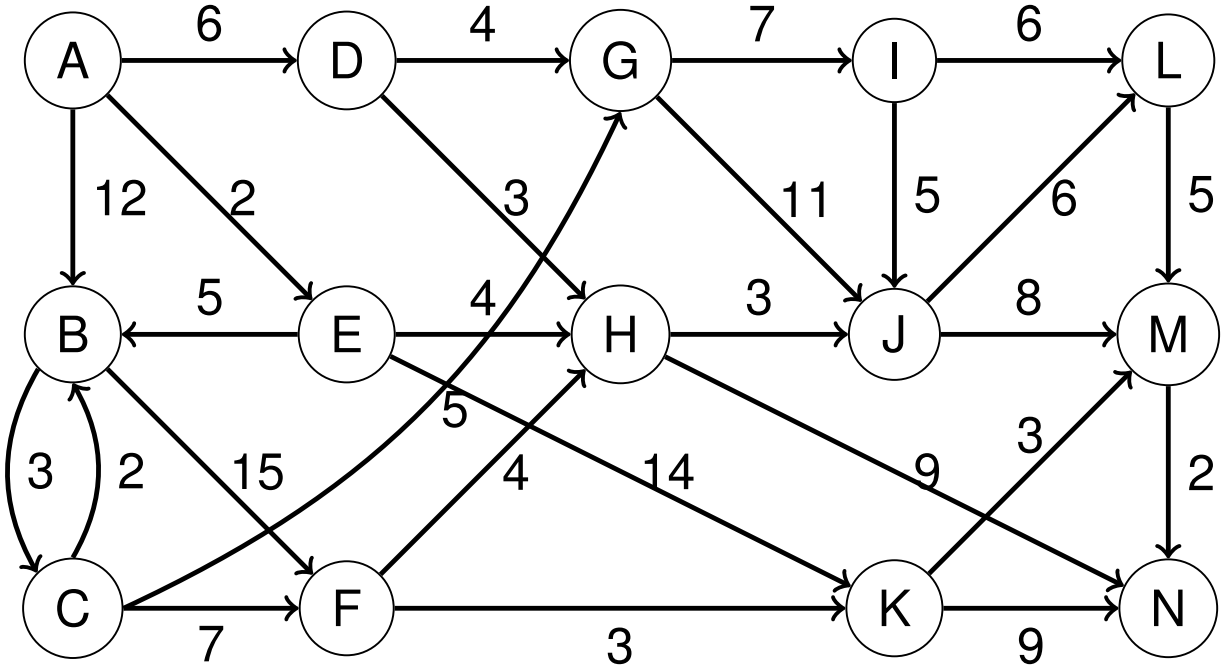
Problème de plus courts chemins

Modélisation de problèmes opérationnels : trajet le plus rapide, le moins cher, gestion optimale des stocks, plan d'investissement optimal.

Définition 4

Une fonction de **poids** *: $w : U \to \mathbb{R}$.*

Objectif : Trouver le chemin de poids minimal qui connecte un sommet s à un sommet t.



Existence d'une solution

- Existe-t-il toujours un chemin d'un sommet s vers un sommet t ?
  Pas toujours : problème des états accessibles en automatique.

Définition 5

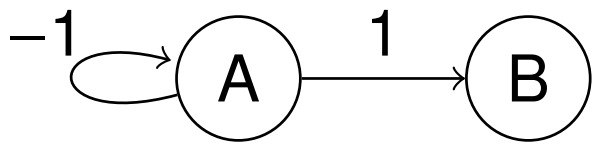
Un graphe G est **fortement connexe** *si, pour tout couple $(x, y) \in X \times X$, il existe un chemin de x à y.*

- Existe-t-il un chemin de poids minimal ?
  - Si le graphe est infini, la réponse peut être non, même dans le cas de poids positifs !

Exercice 1

Proposez un contre-exemple.

- Idem si des longueurs sont négatives :



Cas des graphes finis

Définition 6

- *Un* **circuit** *est un chemin simple et fermé :* $x_k = x_0$.
- *Un chemin qui ne passe pas deux fois par le même sommet est dit* **élémentaire**.

Si le graphe est **sans circuits négatifs :**

- Il est possible de se restreindre aux chemins élémentaires.
- Le nombre de chemins élémentaires est fini.
- L'existence d'un chemin implique celle d'un chemin de longueur minimale.

Cas de poids positifs

En 1959, Dijkstra propose un algorithme qui détermine le chemin de poids minimal entre un sommet de départ s et un sommet final t :

Définition 7 (Algorithme de Dijkstra)

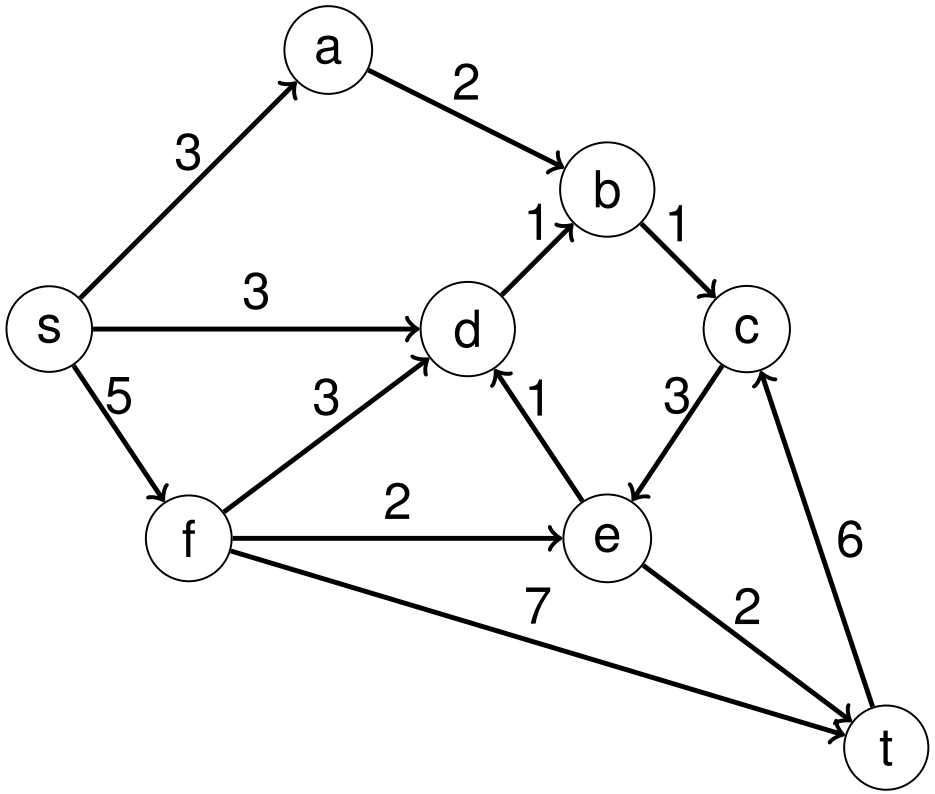
- *Maintenir un ensemble $V \subset X$ et une fonction label courant $\lambda : X \to \mathbb{R}^+$ au cours de l'algorithme.*
- *Initialisation : $V = X$ et $\lambda(s) = 0$, $\lambda(x) = +\infty$ pour tout $x \neq s$.*
- *Répéter la boucle suivante :*
  Choisir $x \in V$ minimisant $\lambda(x)$. Pour chaque arc $(x, y) \in U$, poser $\lambda(y) = \min(\lambda(y), \lambda(x) + W((x, y)))$. Redéfinir l'ensemble $V = V \setminus \{x\}$.

Theorem 1

L'algorithme de Dijkstra converge en $O(n^2)$. En utilisant une bonne structure de données, il est possible d'obtenir une complexité en $O(m + n\log(n))$, où n et m représentent respectivement le nombre de sommets et le nombre d'arcs du graphe considéré.

Exemples

L'algorithme de Dijkstra appliqué au graphe suivant nécessite 8 itérations.



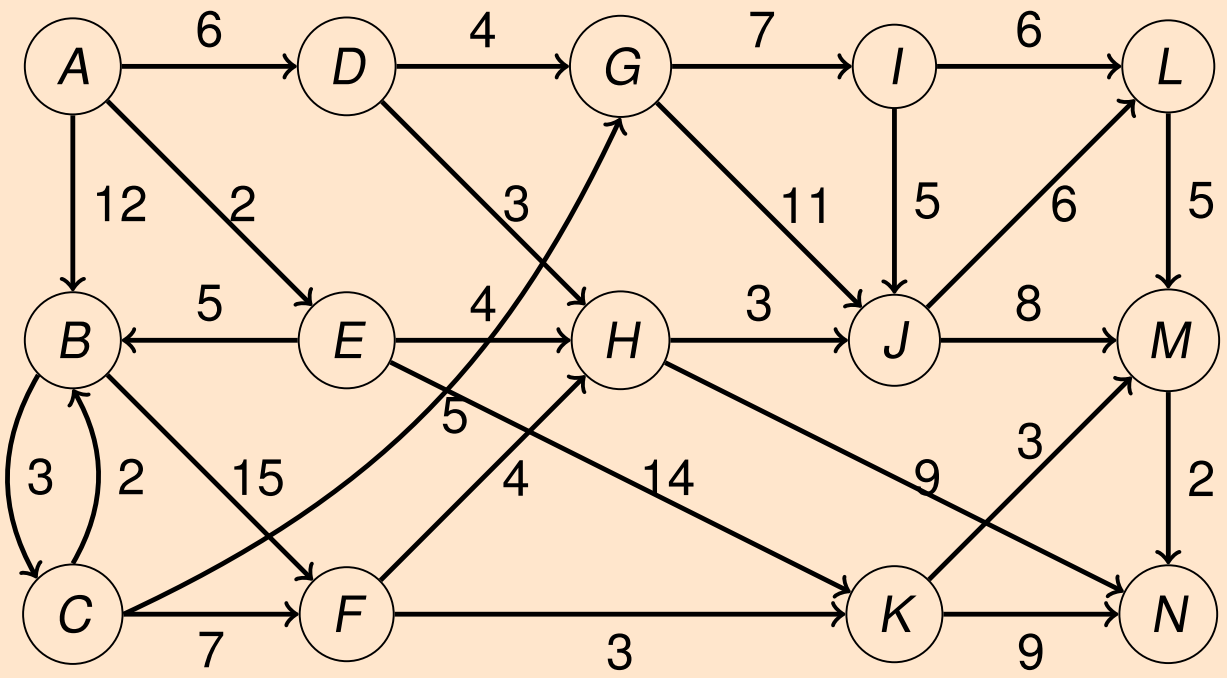
Solution

s	a	b	c	d	e	f	t
(0)	(∞)	(∞)	(∞)	(∞)	(∞)	(∞)	(∞)
0	(3)	(∞)	(∞)	(3)	(∞)	(5)	(∞)
0	3	(5)	(∞)	(3)	(∞)	(5)	(∞)
0	3	(4)	(∞)	3	(∞)	(5)	(∞)
0	3	4	(5)	3	(∞)	(5)	(∞)
0	3	4	5	3	(8)	(5)	(∞)
0	3	4	5	3	(8)	(5)	(∞)
0	3	4	5	3	(7)	5	(12)
0	3	4	5	3	7	5	(9)
0	3	4	5	3	7	5	9

Exemples

Exercice 2

Déterminer le chemin optimal entre les noeuds A et M.



Applications

Exercice 3 (Histoire de seaux)

Un ingénieur dispose de trois seaux non gradués de capacités respectives de 3, 5 et 8 litres. Le seau de 8 litres est rempli à ras bord, tandis que les deux autres sont vides. L'ingénieur souhaite séparer les 8 litres en deux portions de 4 litres. Il veut atteindre cet objectif en un nombre minimal de transvasements, un transvasement consistant à soulever un seau pour vider tout ou partie de son contenu dans un seul autre seau. Donnez une solution optimale en utilisant la méthode la plus générale possible.

Applications

Exercice 4 (Renouvellement d'équipements)

Un équipement doit être renouvelé très régulièrement. Les prix d'achat sont déterminés à l'avance par contrat et dépendent fortement de la saison. Au bout d'un mois d'utilisation, l'équipement doit donc être soit renouvelé, soit faire l'objet d'une maintenance lourde, dont le coût augmente avec la vétusté. Dans tous les cas, l'équipement doit être renouvelé au bout de 6 mois d'utilisation.
Un entrepreneur doit planifier sa politique d'achat pour les 18 mois à venir.
Déterminez une politique d'achat et de maintenance de coût minimal, sachant que l'utilisation doit démarrer le 2 janvier. Les coûts d'achat et de maintenance sont indiqués ci-dessous en fonction du prix de l'équipement initial (mois 1) :

Mois	1 à 2	3 à 5	6	7 à 8	9	10 à 11	12 À 13	14	15 à 16	17 à 18
Coût d'achat	1	1.3	1.1	0.9	0.8	1.2	1.1	1.2	1.5	1.1

Vétusté	1 mois	2 mois	3 mois	4 mois	5 mois
Coût de maintenance	0.1	0.1	0.2	0.4	0.7

Poids quelconques dans un graphe sans circuit

Principe d'optimalité de Bellman : la sous-trajectoire d'une trajectoire optimale est encore optimale.

$$\lambda(y) = \min_{(x,y)\in U} \{\lambda(x) + w((x,y))\}$$

Définition 8

- *Initialisation :* $\lambda(s) = 0$, $\lambda(x) = +\infty$ *si aucun chemin de s à x.*
- *Répéter la boucle suivante :*
  - *Chercher un sommet* $y \in X$ *dont on connaît* λ *pour tous les prédécesseurs.*
  - *Déterminer* $\lambda(y)$ *avec l'équation de Bellman.*
- *L'algorithme converge lorsque* λ *est connu pour tous les sommets* $x \in X$.

Theorem 2

L'algorithme précédent permet de calculer l'ensemble des plus courts chemins de s à tout sommet $x \in X$ *en* $O(m)$.

Applications

Exercice 5

On considère le chantier dont les tâches sont les suivantes :

Tâche	*A*	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*	*G*	*H*	*I*	*J*
Durée	*4*	*7*	*3*	*4*	*6*	*5*	*10*	*2*	*6*	*8*
Après	-	-	-	*A,C*	*B*	*B,D*	*B*	*F*	*G,H*	*I*

En appliquant l'algorithme précédent, déterminez la durée minimale du chantier. Planifiez le chantier pour respecter cette durée minimale tout en commençant chaque tâche le plus tard possible.

Poids quelconques dans un graphe sans circuit négatif

Définition 9 (Algorithme de Ford-Bellman)

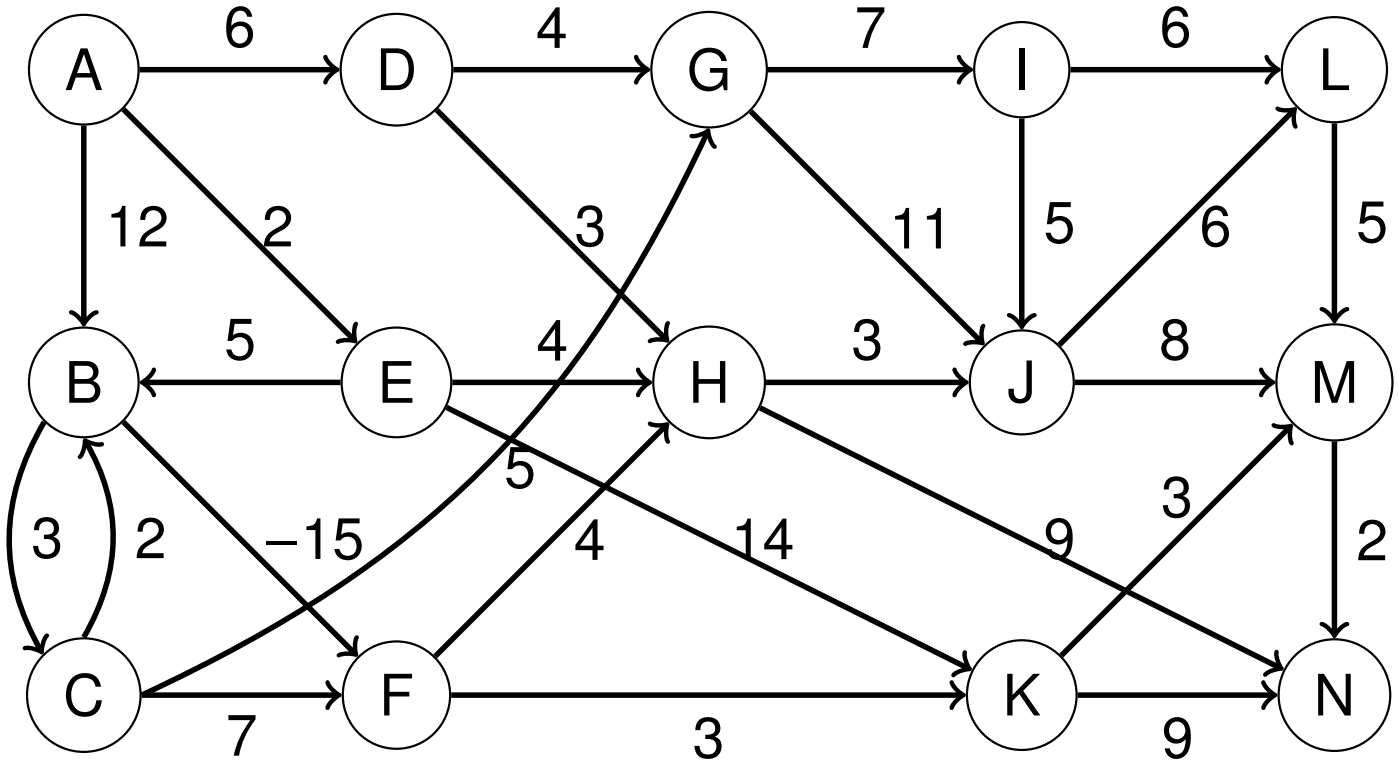
- *Initialisation :* $\lambda(s) = 0$, $\lambda(x) = +\infty$ *pour tout* $x \neq s$.
- *Répéter la boucle suivante :*
  - *Pour chaque sommet* $x \in X$ *dont la valeur de* $\lambda(x)$ *a été modifiée à l'itération précédente, et pour chaque arc* $(x, y) \in U$, *poser* $\lambda(y) = \min(\lambda(y), \lambda(x) + w((x, y)))$.
- *L'algorithme converge si la fonction label* λ *n'évolue pas au cours de deux itérations successives.*

Theorem 3

L'algorithme de Ford-Bellman converge avec une complexité algorithmique de $O(nm)$.

Applications

Exemple de graphe sans cycle négatif



Initialisation

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
λ	0													
marqueur														
Modif	1													

INSA INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES LYON
Pole Math

Application de l'algorithme de Ford Bellman

3 premières itérations de l'algorithme :

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
λ	0													
marqueur														
Modif	1													
λ	0	12		6	2									
marqueur		A		A	A									
Modif	1		1		1	1								
λ	0	7	15	6	2	-3	10	3			16			
marqueur		E	B	A	A	B	D	D			E			
Modif		1	1			1	1	1			1			

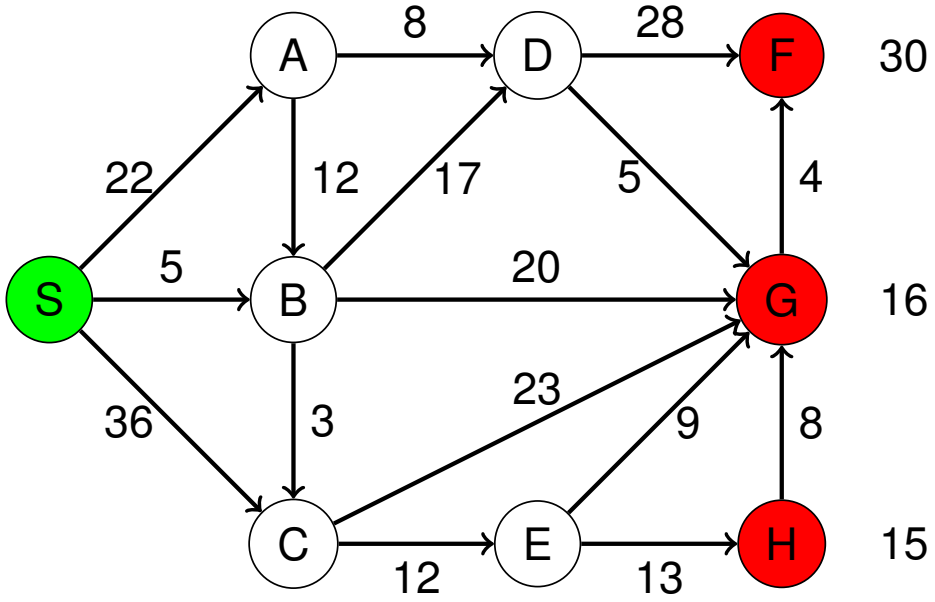
Exercice 6

Terminer l'exécution de l'algorithme de Ford-Bellman

1. Algorithme d'optimisation sur graphe
   - Algorithme du plus court chemin
   - Le problème du flot maximal
   - Problème d'affectation
2. Programmation linéaire
   - Principe de l'algorithme du simplexe
   - Cas particuliers
   - Dualité
3. Chaînes de Markov
   - Chaînes de Markov discrètes
   - Chaînes de Markov Continue
   - Application aux files d'attente

Problématique

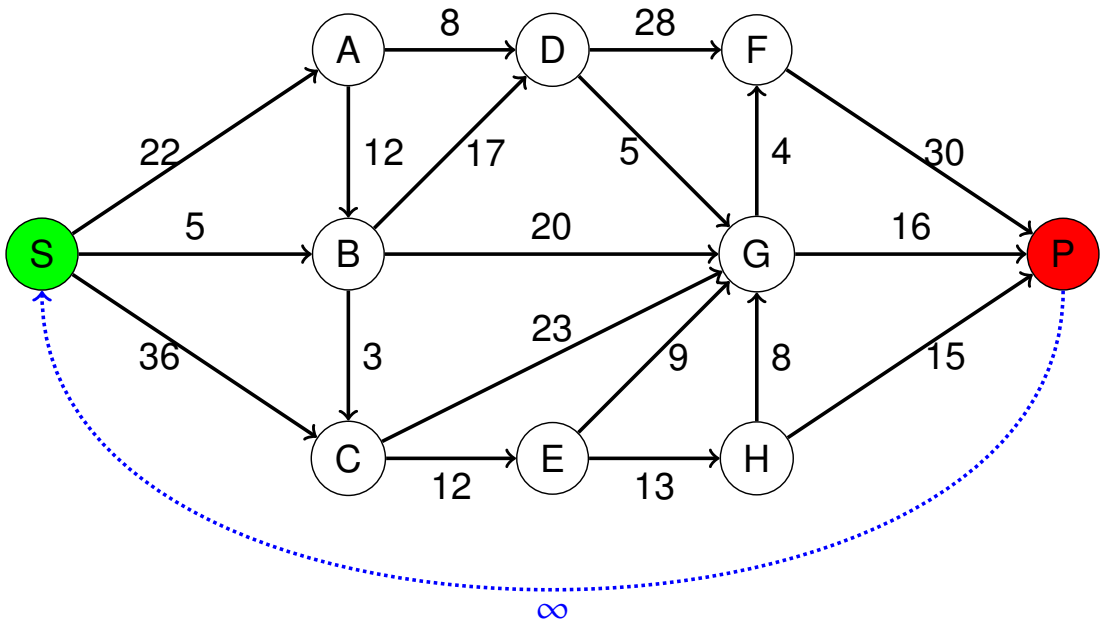
- Une usine S,
- Trois demandes en F, G et H.
- Des disponibilités d'un réseau de transport.



Comment satisfaire au mieux la demande ?

Modélisation du problème

- Une source S, un puits P.
- Des capacités : $c : U \to \mathbb{R}^+$.



Déterminer un flot $f : U \to \mathbb{R}^+$ optimal.

Flot optimal

Déterminer un flot $f : U \to \mathbb{R}^+$ optimal.

Définition 10 (Flot compatible)

- ***Loi de conservation :***

$$\sum_{y \in X \text{ tel que } (x,y) \in U} f((x,y)) = \sum_{z \in X \text{ tel que } (z,x) \in U} f((z,x)).$$

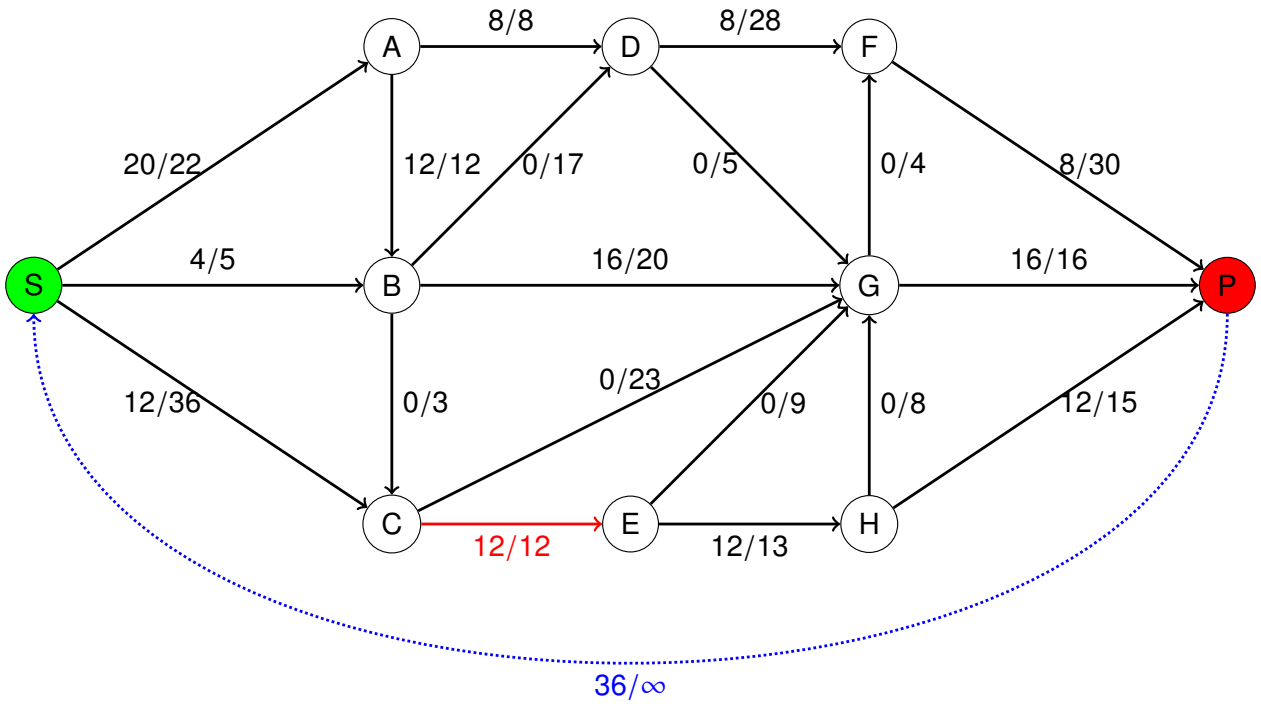
- ***Compatibilité :***

$$\forall u \in U, \quad 0 \leqslant f(u) \leqslant c(u).$$

- ***Valeur du flot :***

$$v(f) = f((P,S)).$$

Exemple de flot



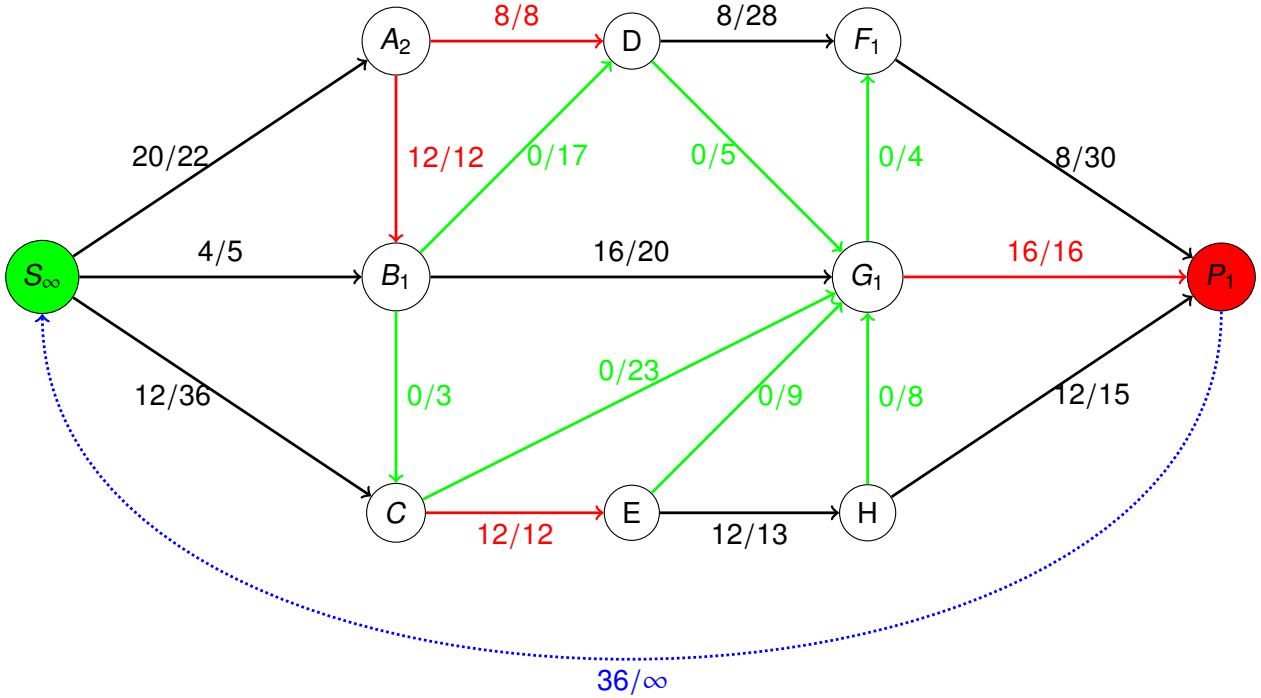
Augmenter la valeur du flot en trouvant un chemin non saturé de S à P à l'aide d'un algorithme d'exploration (Dijkstra) :

Principe de l'algorithme de Ford-Fulkerson (1956)

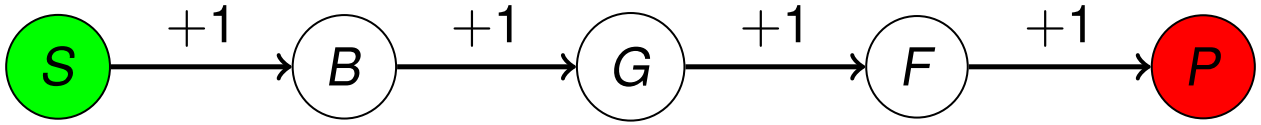
INSA INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES LYON
Pole Math

Chemin augmentant

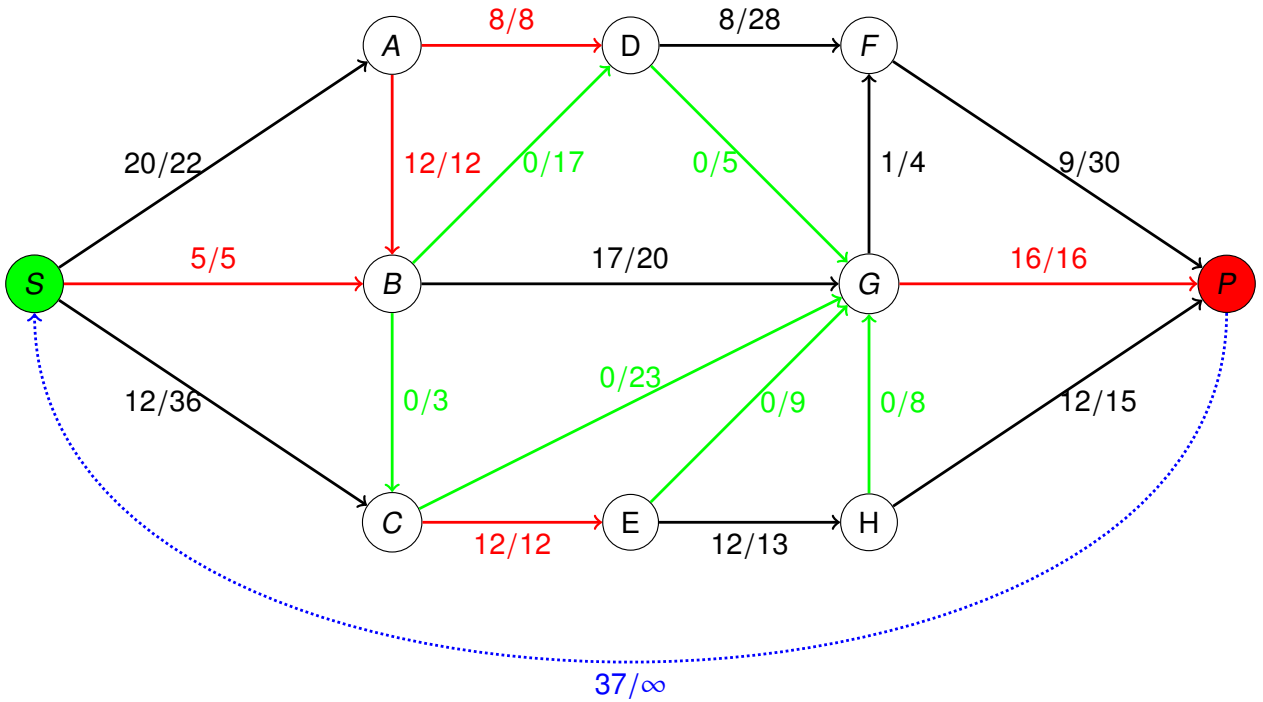
Procédure de marquage



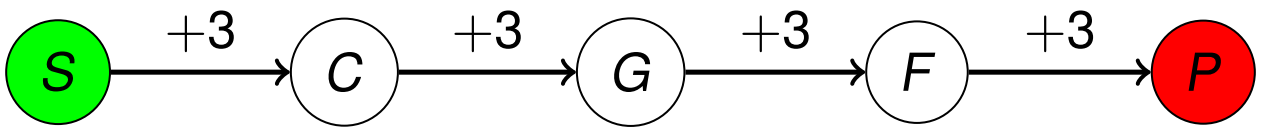
Chemin augmentant :



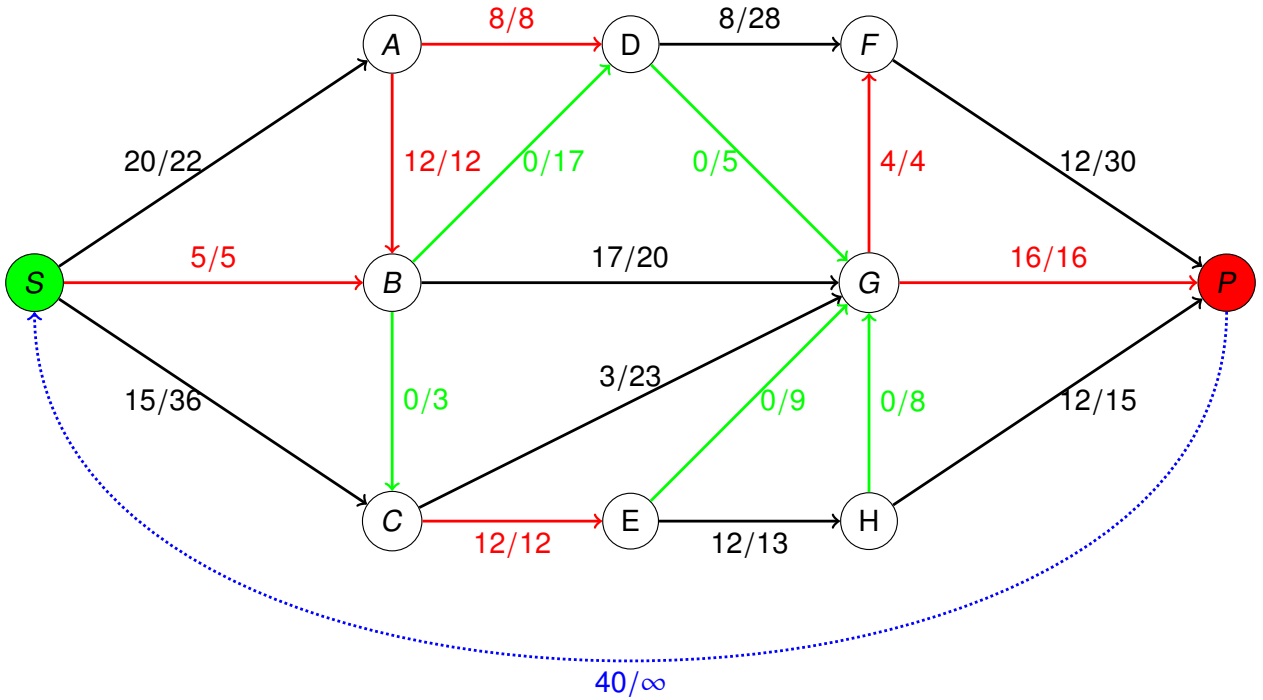
Mise à jour du flot



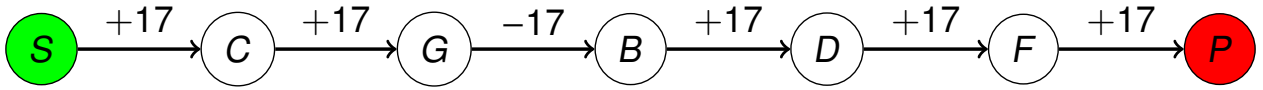
On recommence



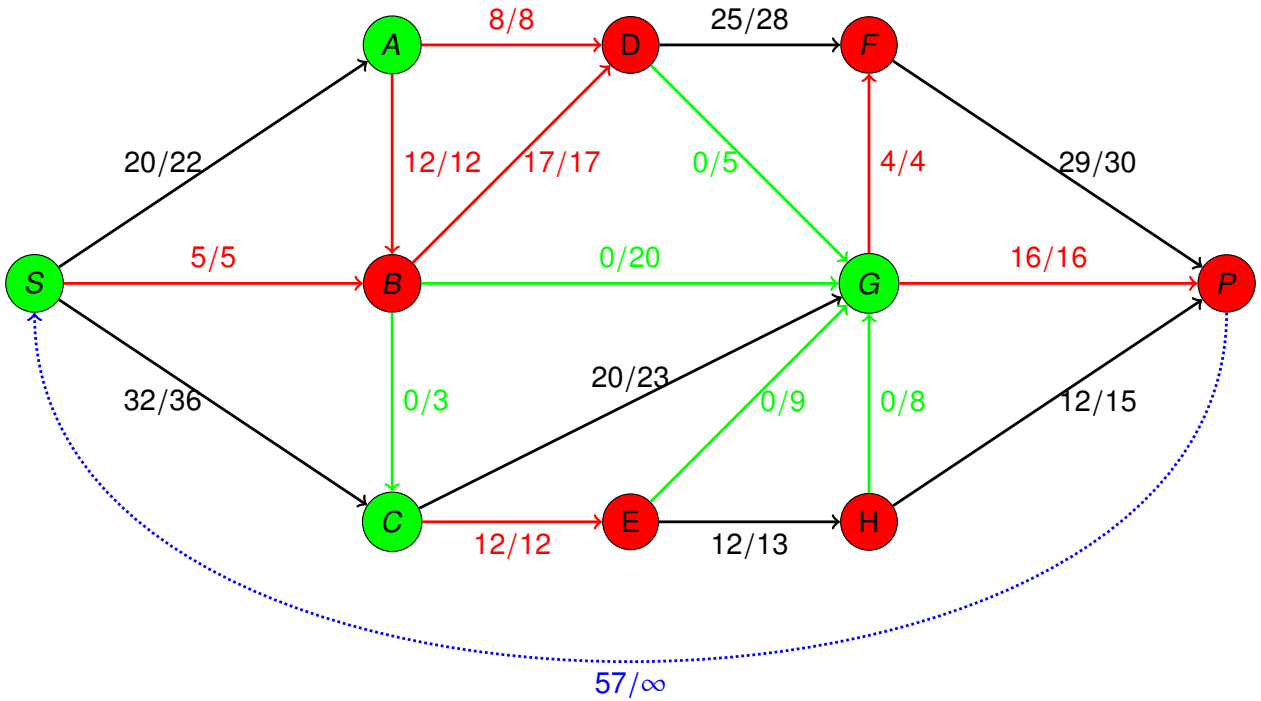
Mise à jour du flot



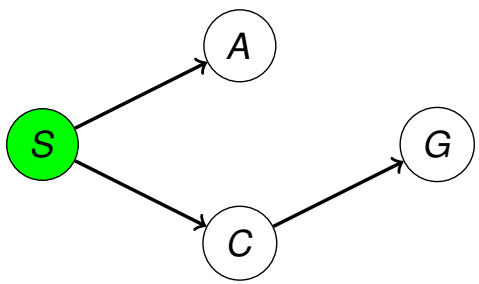
On recommence



Mise à jour du flot



Aucun chemin non saturé !



Comment montrer que la solution trouvée est optimale ?

INSA INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES LYON
Pole Math

Coupes

Définition 11

Une coupe est un ensemble d'arcs de la forme $\Gamma = \{u \in X_1 \times X_2\}$ *où* $X_1 \subset X$ *est un ensemble de sommets de* X *et* $X_2 = X \setminus X_1$ *son complémentaire. On note la capacité de la coupe :*

$$c(\Gamma) = \sum_{u \in \Gamma} c(u).$$

Définition 12

Soit $\Gamma = \{u \in X_1 \times X_2\}$ *une coupe. La coupe inverse* Γ' *est définie par :*

$$\Gamma' = \{u \in X_2 \times X_1\}.$$

- **Exemple d'une coupe et de sa coupe inverse :**
  - Coupe : $\Gamma = \{(AD), (AB), (SB), (CE), (GF), (GP)\}$, avec $c(\Gamma) = 57$.
  - Coupe inverse : $\Gamma' = \{(BC), (EG), (BG), (DG), (HG)\}$, avec $c(\Gamma') = 0$.

INSA INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES LYON
Pôle Math

Dualité flot maximal - coupe minimale

Propriété 1

Pour tout flot compatible f et pour toute coupe Γ séparant la source S du puits P, on a :

$$v(f) = f(\Gamma) - f(\Gamma').$$

En particulier, cela implique :

$$v(f) \leqslant c(\Gamma).$$

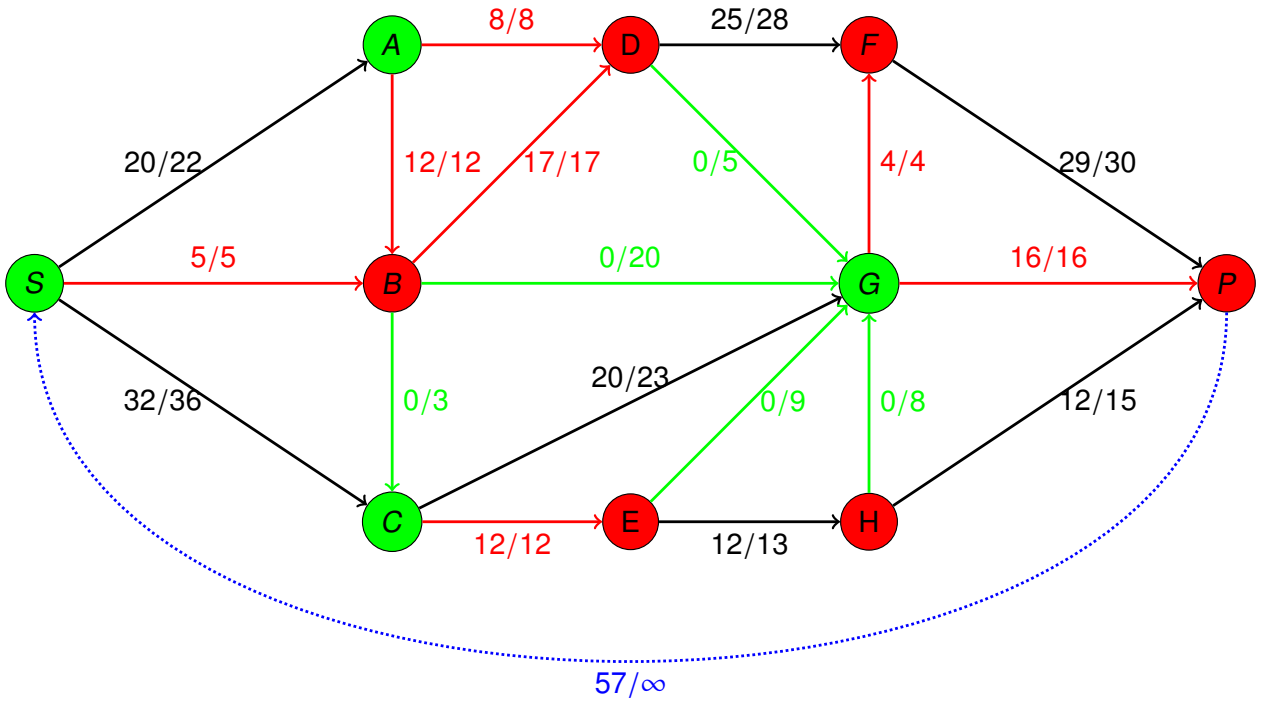
L'égalité indique donc l'optimalité du flot et la minimalité de la coupe.

Démonstration.

Il suffit de sommer toutes les équations de conservation pour les sommets de X_1. □

Retour à l'exemple précédent

On a trouvé un flot f dont la valeur est 57.



La séparation entre les sommets atteints de ceux non atteints a permis la coupe suivante $\Gamma = \{(AD), (AB), (SB), (CE), (GF), (GP)\}$ de capacité $c(\Gamma) = 57$.

On en déduit donc que ce flot est optimal !

Théorème de Ford-Fulkerson

Theorem 4

La valeur maximale v_{max} d'un flot compatible est égale à la capacité minimale c_{min} d'une coupe séparant la source S du puits P.

Démonstration.

- Si l'algorithme de Ford-Fulkerson converge vers un flot f, alors :
- L'ensemble des sommets marqués à la dernière étape définit une coupe Γ.
- Comme le dernier marquage a échoué à trouver un chemin non saturé entre S et P, on en déduit que :

$$f(\Gamma) = c(\Gamma) \quad \text{et} \quad f(\Gamma') = 0.$$

Ainsi, on a :

$$v(f) = f(\Gamma) = c(\Gamma).$$

□

Convergence et complexité de l'algorithme

Convergence de l'algorithme

- Si les capacités sont entières :
  Oui, car les flots sont entiers et le flot augmente d'au moins 1 à chaque étape.
- Si les capacités sont réelles :
  L'algorithme peut diverger. **Une exploration du graphe en largeur** (Edmonds et Karp, 1972) permet de trouver une chaîne améliorante avec un nombre minimal d'arcs et d'assurer la convergence de l'algorithme.

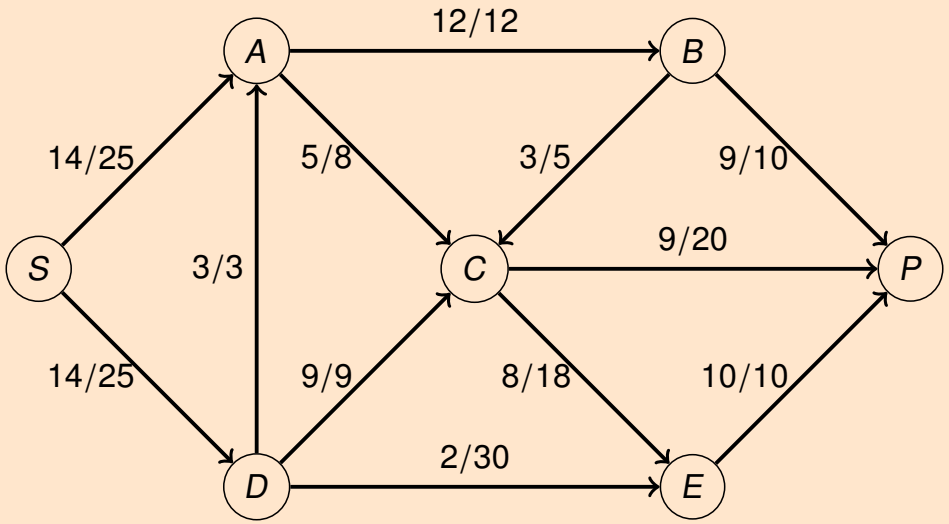
Complexité algorithmique

- Ford-Fulkerson (capacités entières) : $O(m \cdot v_{max})$
- Edmonds et Karp (1972) : $O(n \cdot m^2)$
- Dinic (1970) : $O(n^2 \cdot m)$

Application

Exercice 7 (Amélioration d'un flot)

On considère le réseau et le flots ci-dessous



En donnant toutes les étapes de l'algorithme de Ford-Fulkerson, déterminez le flot maximal et la coupe minimale.

Application

Exercice 8 (Conteneurs)

Une entreprise doit acheminer par bateaux l'ensemble de sa production de trois usines A, B et C (500 conteneurs chacune) vers quatre unités de transformation R, S, T et U pouvant traiter 400 conteneurs chacune. Les capacités (en nombre de conteneurs) des liaisons maritimes disponibles sont indiquées ci-dessous :

	R	S	T	U
A	300	250	0	200
B	140	200	150	0
C	0	0	270	260

Déterminez le nombre maximal de conteneurs pouvant être acheminés à bon port.

Exercice 9 (Planning de Bureau)

Le planning de travail d'un bureau comportant trois employés (X, Y et Z) est actuellement le suivant :

Jour	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
X	A	A	A	A	F	F	F	G	G	G
Y	D	D	D	B	B	B	B	I	I	I
Z	C	C	C	C			H	H	E	E

Les dossiers constituent des tâches morcelables (dont le traitement peut être interrompu, puis repris) dont les caractéristiques sont indiquées ci-dessous :

Dossier	A	B	C	D	E	F	G	H	I
Durée	4	4	4	3	2	3	3	2	3
Disponible le	1	3	1	1	8	4	7	7	7
Échéance	4	7	5	4	10	8	10	9	10

- *Modélisez ce planning comme un flot sur un graphe dont les dossiers et les journées seront des sommets.*
- *Un nouveau dossier J de durée deux jours et ne pouvant être disponible que le jour 9 vient d'arriver. Insérez-la au mieux dans le planning.*

1. Algorithme d'optimisation sur graphe
   - Algorithme du plus court chemin
   - Le problème du flot maximal
   - Problème d'affectation
2. Programmation linéaire
   - Principe de l'algorithme du simplexe
   - Cas particuliers
   - Dualité
3. Chaînes de Markov
   - Chaînes de Markov discrètes
   - Chaînes de Markov Continue
   - Application aux files d'attente

Motivation : Répartition de projets

- 4 projets à répartir entre 4 étudiants
- Chaque projet nécessite une formation complémentaire dont le coût en heures est donné par la matrice suivante :

	A	B	C	D
1	1	2	2	2
2	1	3	3	2
3	1	2	3	3
4	4	1	1	1

- Exemples d'affectations :
  - $\mathcal{A}_1 = \{(A,1),(B,2),(C,3),(D,4)\}$ avec un coût $c(\mathcal{A}_1) = 8$
  - $\mathcal{A}_2 = \{(A,4),(B,4),(C,3),(D,1)\}$ avec un coût $c(\mathcal{A}_2) = 11$

Comment trouver l'affectation optimale qui minimise le coût global ?

L'algorithme hongrois (Kuhn, 1955)

Idée de base

- Construction d'une suite de **matrices équivalentes positives** ou nulles, avec au moins un zéro par ligne et par colonne.
- Chercher des affectations partielles avec un coût nul en ramenant le problème à un **calcul de flot maximal** dans un **graphe biparti**.

Définition 13

Un graphe biparti est un graphe dont l'ensemble des sommets peut être partitionné en deux parties X et Y telles que toute arête a une extrémité dans X et l'autre dans Y.

Matrice équivalente

Dans le cas d'une **matrice carrée**, une affection complète utilise une seules des valeurs pour chaque ligne et chaque colonne. L'ajout d'une constante sur une ligne ou une colonne modifie donc le coût de toutes les affectations en ajoutant cette même constante.

	A	B	C	D	
1	1	2	2	2	← -1
2	1	3	3	2	← -1
3	1	2	3	3	← -1
4	4	1	1	1	← -1

	A	B	C	D
1	0	1	1	1
2	0	2	2	1
3	0	1	2	2
4	3	0	0	0

Les affections précédentes ont un niveau coût diminué de 4 dans la nouvelle matrice équivalente

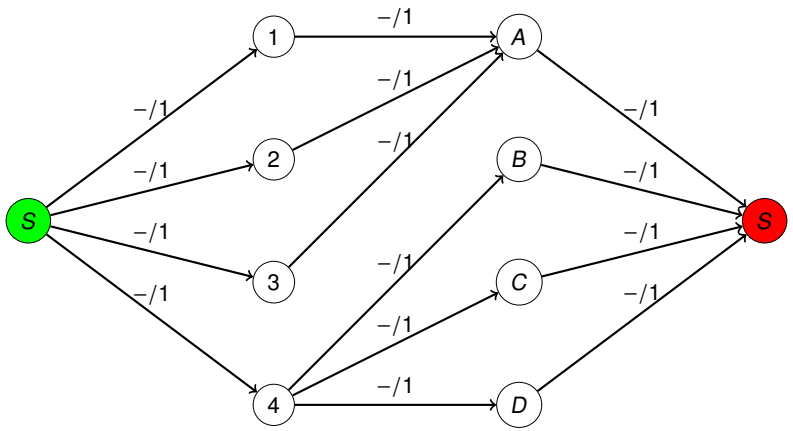
- $\mathcal{A}_1 = \{(A,1),(B,2),(C,3),(D,4)\}$ avec un coût $c(\mathcal{A}_1) = 8 - 4 = 4$
- $\mathcal{A}_2 = \{(A,4),(B,4),(C,3),(D,1)\}$ avec un coût $c(\mathcal{A}_2) = 11 - 4 = 7$

Affectation à coût zéros

Déterminer une couplage optimale de coût nul dans la nouvelle matrice

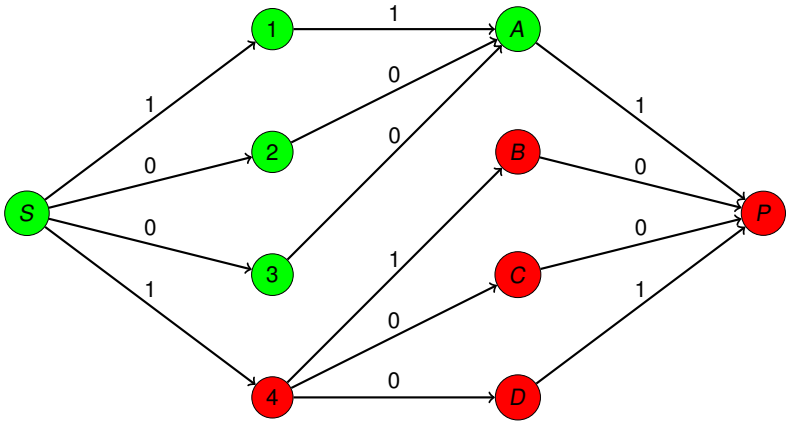
	A	B	C	D
1	0	1	1	1
2	0	2	2	1
3	0	1	2	2
4	3	0	0	0

Les zéros de cette matrices définissent un graphe biparti !



Utiliser l'algorithme de Ford-Fulkerson pour déterminer le flot max !

Algorithme de Ford-Fulkerson



	A	B	C	D	
1	(0)	1	1	1	
2	0	2	2	1	
3	0	1	2	2	
4	3	(0)	0	0	←
	↑				

Coupe optimale : $\Gamma = \{(S4), (AP)\}$.

Ensemble transverse : $\{4, A\}$

Définition 14

Un ensemble T de sommets est dit transversal lorsque tout arc a au moins une extrémité dans T.

Theorem 5 (König (1931), Egervary (1931))

Dans un graphe biparti, la taille maximale d'un couplage est égale à la taille minimale d'un ensemble transverse

Modification de la matrice M

- Déterminer **la valeur $c_{\min}$** minimale parmi les éléments (non barrées) de la matrice $M_{i,j}$ telle que $i \notin T$ et $j \notin T$.
- Retirer cette valeur $c_{\min}$ aux lignes $i \notin T$ et aux colonnes $j \in T$.

	A	B	C	D	
1	(0)	1	1	1	← -1
2	0	2	2	1	← -1
3	0	1	2	2	← -1
4	3	(0)	0	0	
	↑ +1				

	A	B	C	D
1	0	0	0	0
2	0	1	1	0
3	0	0	1	1
4	4	0	0	0

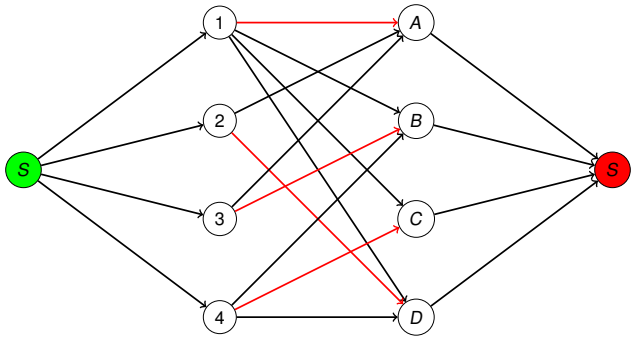
Remarque 1

À un ensemble transverse T peut être associée une coupe minimale Γ. Ajouter un zéro dans une case $M_{i,j}$ telle que $i \notin S$ et $j \notin S$ revient à ajouter une arête dans la coupe Γ. En revanche, un zéro positionné dans une case $M_{i,j}$ telle que $i \in S$ et $j \in S$ correspond à une arête de Γ'.

Nouvelle itération de l'algorithme hongrois

- Plusieurs solutions de flots f avec $v(f) = 4$

	A	B	C	D
1	(0)	0	0	0
2	0	1	1	(0)
3	0	(0)	1	1
4	4	0	(0)	0



- Coupe minimale et ensemble transversal associé :

$$\Gamma = \{(S,1),(S,2),(S,3),(S,4)\} \text{ et } T = \{1,2,3,4\}$$

- Exemple d'affectation optimale $\mathcal{A}_3 = \{(A,1),(B,3),(C,4),(D,2)\}$.

Retour au tableau initial

	A	B	C	D
1	(0)	0	0	0
2	0	1	1	(0)
3	0	(0)	1	1
4	4	0	(0)	0

	A	B	C	D
1	(1)	2	2	2
2	1	3	3	(2)
3	1	(2)	3	3
4	4	1	(1)	1

- Exemple d'affectation optimale

$$\mathcal{A}_3 = \{(A,1),(B,3),(C,4),(D,2)\},$$

avec un coût de $c(\mathcal{A}_3) = 4 + 2 = 6$

Applications

Exercice 10

Déterminer l'affectation optimale de la matrice de coût suivant :

	A	B	C	D	E	F
1	35	19	16	21	23	40
2	37	25	19	24	27	35
3	33	16	13	19	24	30
4	19	4	21	6	7	19
5	37	24	18	19	25	36
6	15	5	7	6	5	14

Exercice 11 (De 5 à 6)

Six techniciens ont l'usage privé de leur voiture de service. Chacun d'eux doit pouvoir effectuer si besoin deux interventions dans la journée, payées au forfait. Le temps de transport entre deux interventions dans la même journée est rémunéré en fonction du kilométrage. Mais ayant l'usage de leur voiture de service, le temps de trajet entre le domicile et une intervention n'est pas pris en charge.

Exercice 12 (De 5 à 6,suite)

Pour la journée du lundi, cinq demandes d'intervention ont été enregistrées pour le matin et six pour l'après- midi. Le tableau des distances entre ces interventions est donné ci-dessous :

	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
M_1	25	25	25	20	10	45
M_2	45	20	30	40	45	80
M_3	60	35	40	30	35	60
M_4	65	45	40	25	30	30
M_5	50	15	30	35	45	70

- *Déterminez une répartition entre les techniciens minimisant le temps global de transport payé.*
- *L'entreprise pense revenir sur la mise à disposition des véhicules. Dans ce cas, il faudrait payer aussi le temps de transport entre le dépôt des véhicules et les lieux d'intervention (toujours en fonction du kilométrage). Déterminez alors une répartition minimisant le temps global de transport payé. Les distances entre le dépôt et les lieux d'intervention sont données ci-dessous :*

	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
Distance	40	25	35	40	50	40	25	20	25	30	55

Exercice 13 (Optimal pour tous ?)

Une promotion de huit étudiant(e)s doit se répartir entre quatre options A, B, C et D. Chacune de ses options offre deux places. Afin de ne pas perturber l'ambiance par des discussions difficiles, il est décidé de procéder à une affectation automatique des étudiants. Pour ce faire, les étudiants indiquent leurs préférences en attribuant librement une note comprise entre 0 *pour l'option qu'ils préfèrent et pouvant aller jusqu'à* 10 *pour une option qu'ils veulent absolument éviter sous la seule contrainte d'attribuer 20 points. Les notes attribuées sont les suivantes :*

	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5	E_6	E_7	E_8
A	7	10	10	7	7	3	0	10
B	7	3	4	0	0	8	10	2
C	0	7	6	8	5	0	4	8
D	6	0	0	5	8	9	6	0

- *Déterminez une affectation minimisant le score global. Cette affectation est-elle unique ? Comment les déterminer toutes ?*
- *L'inconvénient d'une affectation optimale au sens précédent est que l'optimum peut être atteint en sacrifiant quelques personnes affectées dans des scores élevés. proposez une méthode qui permette de calculer une solution optimale mais qui de plus soit le plus homogène possible.*

1 Algorithme d'optimisation sur graphe
- Algorithme du plus court chemin
- Le problème du flot maximal
- Problème d'affectation

2 Programmation linéaire
- Principe de l'algorithme du simplexe
- Cas particuliers
- Dualité

3 Chaînes de Markov
- Chaînes de Markov discrètes
- Chaînes de Markov Continue
- Application aux files d'attente

Motivation : l'atelier de production

- Deux productions P_1 et P_2
- Trois ressources limitées $R_1(2)$, $R_2(2)$, $R_3(3)$.
- Matrice de consommation :

	R_1	R_2	R_3
P_1	1	0	1
P_2	0	1	1

- Un profit global à optimiser : P_1 : 3 €/unité, P_2 : 2 €/unité,

Modélisation

- Deux variable positives
  - Quantité de P_1 produit : $x_1 \geqslant 0$
  - Quantité de P_2 produit : $x_2 \geqslant 0$
- Contrainte de ressources :

$$\begin{cases} x_1 \leqslant 2, \\ x_2 \leqslant 2, \\ x_1 + x_2 \leqslant 3 \end{cases}$$

- Fonction économique à optimiser :

$$z = 3x_1 + 2x_2$$

Modélisation

Définition 15 (Forme canonique)

La forme canonique d'un problème de programmation linéaire est de la forme

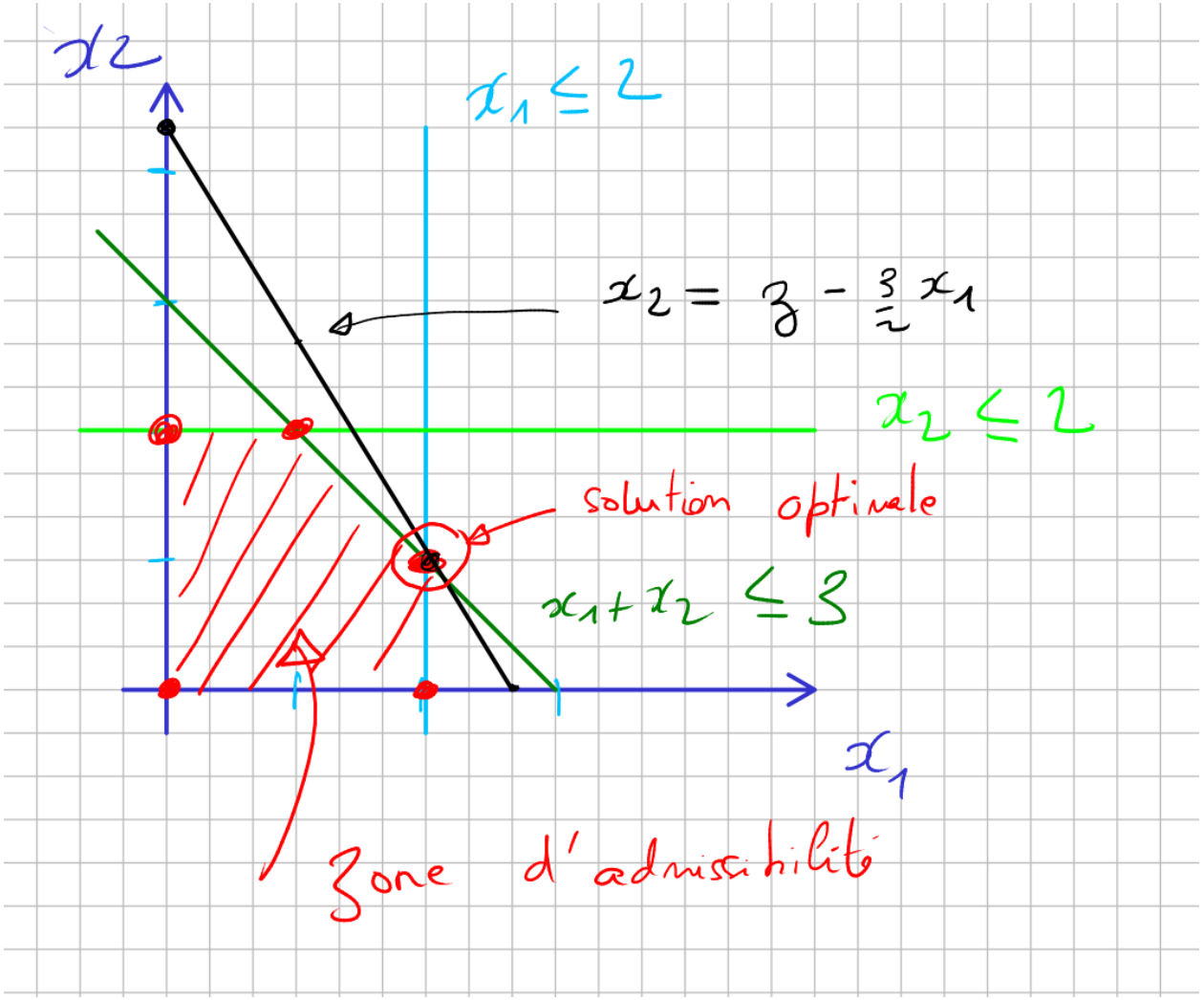
$$\begin{cases} 0 \leqslant x, \\ Ax \leqslant b, \\ (Max)z = c \cdot x \end{cases}$$

Cas particulier de l'atelier de production

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ et } c = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Résolution graphique

La solution est localisée sur un coin du polygone d'admissibilité convexe



Comment généraliser cette résolution en dimension supérieure à 2 ?

INSA INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES LYON
Pole Math

1 Algorithme d'optimisation sur graphe
- Algorithme du plus court chemin
- Le problème du flot maximal
- Problème d'affectation

2 Programmation linéaire
- Principe de l'algorithme du simplexe
- Cas particuliers
- Dualité

3 Chaînes de Markov
- Chaînes de Markov discrètes
- Chaînes de Markov Continue
- Application aux files d'attente

Variable d'écart

- Variables supplémentaires associées à chacune des contraintes

$$\begin{cases} x_3 = 2 - x_1 \geqslant 0 \\ x_4 = 2 - x_2 \geqslant 0 \\ x_5 = 3 - (x_1 + x_2) \geqslant 0 \end{cases}$$

- Choisir un sommet du polygone d'admissibilité convexe revient à fixer 2 variables nulles parmi x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, variables qu'on appelle par la suite variables hors base

$$\begin{cases} x_1 = 0 \text{ et } x_2 = 0 \Longrightarrow x^1 = (0,0)^t \\ x_1 = 0 \text{ et } x_3 = 0 \Longrightarrow x^2 = (2,0)^t \\ x_2 = 0 \text{ et } x_4 = 0 \Longrightarrow x^3 = (0,2)^t \\ x_3 = 0 \text{ et } x_5 = 0 \Longrightarrow x^4 = (2,1)^t \\ x_4 = 0 \text{ et } x_5 = 0 \Longrightarrow x^5 = (1,2)^t \end{cases}$$

Modélisation

Définition 16 (Forme standard)

La forme standard d'un problème de programmation linéaire est la suivante :

$$\begin{cases} 0 \leqslant x, \\ Ax = b, \\ (Max)z = c \cdot x \end{cases}$$

Cas particulier de l'atelier de production

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ et } c = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Tableau du simplexe

- Mise sous forme d'un tableau

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	z	
(x_3)	1	0	1	0	0	0	2
(x_4)	0	1	0	1	0	0	2
(x_5)	1	1	0	0	1	0	3
	-3	-2	0	0	0	1	0

- Lecture du tableau
  - Variables hors base : $x_1 = x_2 = 0$
  - Variables dans la base :

$$\begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

  - Fonction économique

$$z = 0 + 2x_1 + 3x_2 = 0.$$

INSA INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES LYON
Pole Math

Algorithme du simplexe

- **Principe de l'algorithme**
  - Partir d'une base réalisable
  - Pivoter pour augmenter z en restant réalisable
  - Terminer sur une base optimale
- Question ?
  - Comment pivoter ?
  - Base optimale $\Longrightarrow$ solution optimale
- **Historique**
  - D.B Dantzib (1914-2005) le "père de la programmation linéaire"
  - 1947 : " simplex method" dus des problèmes de l'US Air Force
  - 1975 : prix Nobel d'économie à Kantorovich et Koopmans sur l'allocution optimale de ressources

Changement de base et choix d'un pivot

- On souhaite faire rentrer x_1 dans la base et faire sortir x_3 pour être certain de garder des variables positives !

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	z	
$x_1 \leftrightarrow x_3$	1	0	1	0	0	0	2
x_4	0	1	0	1	0	0	2
x_5	1	1	0	0	1	0	3
	-3	-2	0	0	0	1	0

- Modifier le tableau du simplexe pour garder **sa structure particulière**

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	z	
$\ell'_1 \longleftarrow \ell_1$	1	0	1	0	0	0	2
$\ell'_2 \longleftarrow \ell_2$	0	1	0	1	0	0	2
$\ell'_3 \longleftarrow \ell_3 - \ell_1$	1	1	0	0	1	0	3
$\ell'_z \longleftarrow \ell_z + 3\ell_1$	-3	-2	0	0	0	1	0

Evolution du tableau du simplexe

- Nouveau tableau

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	z	
(x_1)	1	0	1	0	0	0	2
(x_4)	0	1	0	1	0	0	2
(x_5)	0	1	-1	0	1	0	1
	0	-2	3	0	0	1	6

- Lecture du Tableau :

$$x = (2, 0, 0, 2, 1) \text{ et } z = 6 + 2x_2 - 3x_3$$

- Choix du nouveau pivot :

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	z	
(x_1)	1	0	1	0	0	0	2
(x_4)	0	1	0	1	0	0	2
$x_2 \leftrightarrow x_5$	0	1	-1	0	1	0	1
	0	-2	3	0	0	1	6

INSA INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES LYON
Pole Math

Nouveau changement de base

- Nouveau Tableau

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	z	
(x_1)	1	0	1	0	0	0	2
(x_4)	0	0	1	1	0	0	1
(x_2)	0	1	-1	0	1	0	1
	0	0	1	0	2	1	8

- lecture du Tableau
  - Variables :

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (2, 1, 0, 1, 0),$$

  - Fonction économique

$$z = 8 - x_3 - 2x_5 = 8,$$

  - Majoration qui permet de trouver un borne maximale pour z dans le cas de solution réalisable :

$$z = 8 - x_3 - 2x_5 \leqslant 8.$$

INSA INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES LYON
Pole Math

Convergence et coût algorithmique

- Convergence de l'algorithme :
  z augmente mais l'algorithme peut présenter un cycle sauf si la règle de l'indice minimum est utilisée (Bland, 77).
- Nombre d'étapes ?
  exponentiel sur certains cas théoriques mais très rapide en pratique.

Exercice 14 (Pollutions)

Une unité chimique doit respecter des normes maximales de rejet de polluants. Pour une période donnée, ces normes sont données par le tableau suivant :

Polluant	*X*	*Y*	*Z*	*W*
Norme (g)	*45*	*70*	*40*	*70*

L'unité chimique peut choisir librement entre 4 productions dont les rejets sont exprimés ci-dessous en mg/kg :

Produit	*X*	*Y*	*Z*	*W*	*bénéfice (€/kg)*
a	*2*	*4*	*1*	*0*	*0.3*
b	*4*	*10*	*0*	*0*	*0.4*
c	*1*	*0*	*4*	*5*	*0.5*
d	*2*	*0*	*5*	*10*	*0.8*

Calculez la production optimale, les rejets et le bénéfice correspondants.

Exercice 15 (Forme Standard)

Donnez une forme standard pour chacun des problèmes suivants :

$$\begin{cases} 0 \leqslant x_1, x_2, x_3, x_4 \\ x_1 + x_2 = 4 \\ x_2 \geqslant x_3 + 2 \\ x_1 \leqslant x_3 + 1 \\ z = x_1 + 3x_2 (\max) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 \leqslant y_1, y_2 \\ 2 \leqslant y_4 \leqslant 5, \\ y_2 \leqslant y_1 + y_4 \\ y_1 + 3y_2 \leqslant 4 \\ y_2 - y_3 \leqslant y_1 - y_4 \\ w = y_1 + y_2 + y_3 + y_4 (\min) \end{cases}$$

Exercice 16 (Modélisation d'un problème de planification)

Un atelier de fabrication composé de 4 opérateurs doit assurer une commande exceptionnelle de 130 pièces en 4 semaines. Il est décidé de procéder à l'embauche d'intérimaires pour exécuter cette commande. Les données du problème sont les suivantes :

- *Un opérateur peut être soit producteur, soit formateur, soit inactif dans une semaine donnée.*
- *Un formateur forme un intérimaire en une semaine. Ils produisent ensemble alors 1 pièce.*
- *Un producteur peut produire au maximum 5 pièces par semaine (un inactif produit 0 pièces).*
- *Les intérimaires seront embauchés au début d'une semaine et licenciés à la fin de la semaine 4.*
- *Un intérimaire formé a les mêmes capacités qu'un opérateur.*
- *Une pièce rapporte 200 €(frais autres que salariaux payés), mais tous les employés coûtent 400 €/semaine.*
- *Un bonus est prévu pour livraison anticipée : il s'élève, par pièce livrée, à 50 €en semaine 1, puis décroît à 20 €en semaine 2, puis 10 €en semaine 3.*

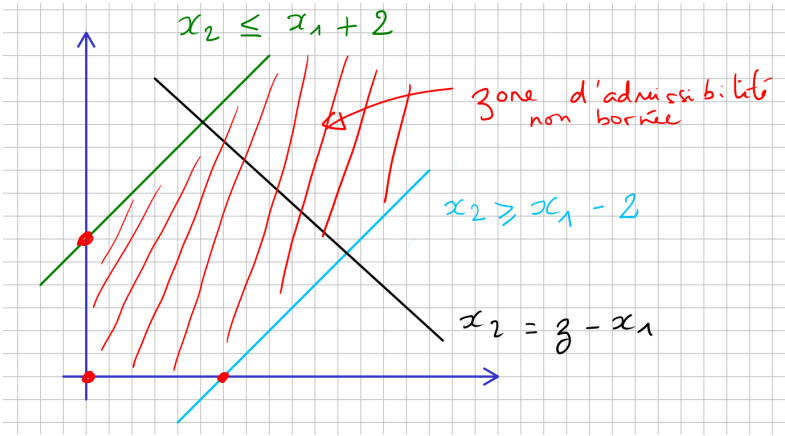
Modélisez le problème.

1. Algorithme d'optimisation sur graphe
   - Algorithme du plus court chemin
   - Le problème du flot maximal
   - Problème d'affectation
2. Programmation linéaire
   - Principe de l'algorithme du simplexe
   - Cas particuliers
   - Dualité
3. Chaînes de Markov
   - Chaînes de Markov discrètes
   - Chaînes de Markov Continue
   - Application aux files d'attente

Existence de solution

- Exemple d'un cas sans solution bornée !

$$\begin{cases} x_1, x_2 \geqslant 0, \\ -x_1 + x_2 \leqslant 2, \\ x_1 - x_2 \leqslant 2, \\ z = x_1 + x_2, (\max) \end{cases}$$



- Initialisation du tableau de simplexe

	x_1	x_2	x_3	x_4	z	
(x_3)	-1	1	1	0	0	2
(x_4)	1	-1	0	1	0	2
	-1	-1	0	0	1	0

solution $(x_1, x_2) = (0, 0)$ avec $z = 0$.

Existence de solution non bornée

- Choix du pivot :

	x_1	x_2	x_3	x_4	z	
(x_3)	-1	1	1	0	0	2
$x_1 \leftrightarrow x_4$	1	-1	0	1	0	2
	-1	-1	0	0	1	0

- Changement de base

	x_1	x_2	x_3	x_4	z	
(x_3)	0	0	1	1	0	4
(x_1)	1	-1	0	1	0	2
	0	-2	0	1	1	2

solution $(x_1, x_2) = (2, 0)$ avec $z = 2$.

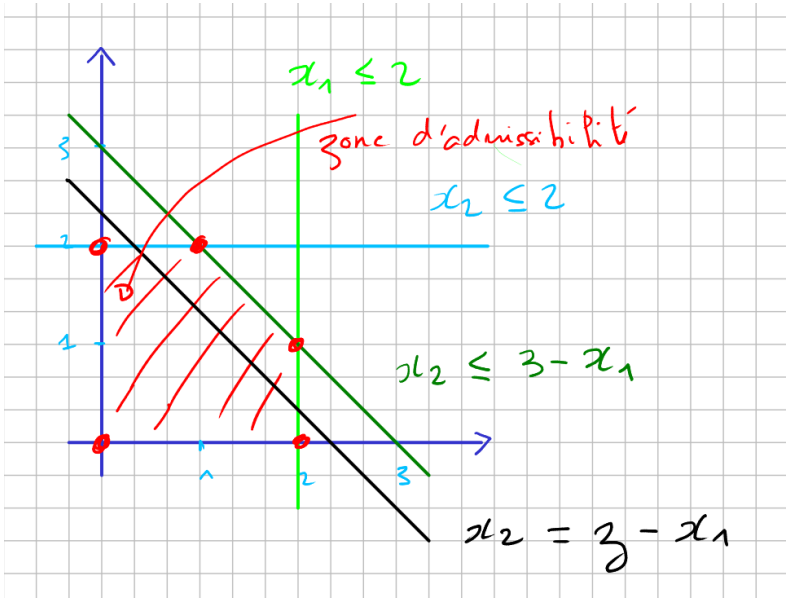
- Choix du nouveau pivot ?

  Impossible car il n'y a pas d'éléments positifs dans la colonne de x_2, ce qui implique la non-existence d'une solution bornée.

Unicité de la solution

- Exemple d'un cas avec non unicité de la solution !

$$\begin{cases} x_1, x_2 \geqslant 0, \\ x_1 \leqslant 2, \\ x_2 \leqslant 2, \\ x_1 + x_2 \leqslant 3 \\ z = x_1 + x_2, (\max) \end{cases}$$



- Initialisation du tableau de simplexe

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	z	
$x_1 \leftrightarrow x_3$	1	0	1	0	0	0	2
(x_4)	0	1	0	1	0	0	2
(x_5)	1	1	0	0	1	0	3
	-1	-1	0	0	0	1	0

solution $(x_1, x_2) = (0, 0)$ avec $z = 0$.

INSA INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES LYON
Pole Math

Unicité de la solution

- Première étape

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	z	
(x_1)	1	0	1	0	0	0	2
(x_4)	0	1	0	1	0	0	2
$x_2 \leftrightarrow x_5$	0	1	-1	0	1	0	1
	0	-1	1	0	0	1	2

solution $(x_1, x_2) = (2, 0)$ avec $z = 2$.

- Deuxième étape

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	z	
(x_1)	1	0	1	0	0	0	2
(x_4)	0	0	1	1	-1	0	1
(x_2)	0	1	-1	0	1	0	1
	0	0	0	0	1	1	3

solution $(x_1, x_2) = (2, 1)$ avec $z = 3$.

- Possibilité de permuter $x_3 \leftrightarrow x_4$ sans modifier la valeur du z !

Unicité de la solution

- Autre solution

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	z	
(x_1)	1	0	0	-1	1	0	1
(x_3)	0	0	1	1	-1	0	1
(x_2)	0	1	0	1	0	0	2
	0	0	0	0	1	1	3

solution $(x_1, x_2) = (1, 2)$ avec $z = 3$.

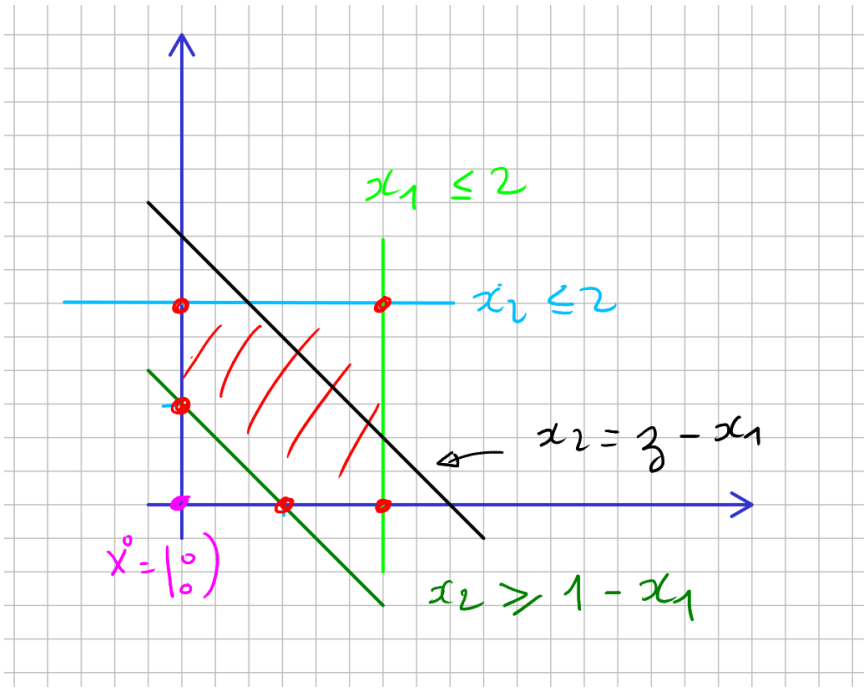
Propriété 2 (unicité de la solution)

Oui si les coefficients de variables hors-bases sont strictement positifs.

Problème d'initialisation

- Exemple d'un cas où $x = 0$ n'est pas dans la zone d'admissibilité :

$$\begin{cases} x_1, x_2 \geqslant 0, \\ x_1 \leqslant 2, \\ x_2 \leqslant 2, \\ x_1 + x_2 \geqslant 1 \\ z = x_1 + x_2, (\max) \end{cases}$$



Problème d'initialisation

- Forme Standard

$$\begin{cases} x_1, x_2 \geqslant 0, \\ x_1 + x_3 = 2, \\ x_2 + x_4 = 2, \\ -x_1 - x_2 + x_5 = -1 \\ z = x_1 + x_2, (\max) \end{cases}$$

- Initialisation du tableau de simplexe

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	z	
(x_3)	1	0	1	0	0	0	2
(x_4)	0	1	0	1	0	0	2
(x_5)	-1	-1	0	0	1	0	-1
	-1	-1	0	0	0	1	0

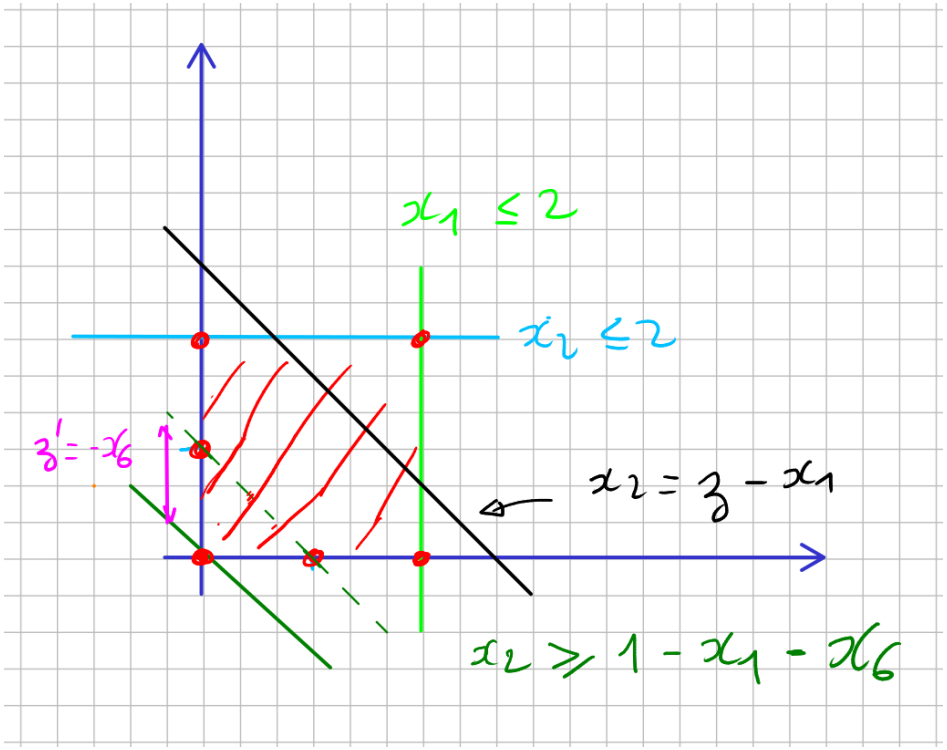
solution $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (0, 0, 2, 2, -1)$ avec $z = 0$.

Simplexe double phase

- Idée : Introduire une variable supplémentaire pour "agrandir" la zone d'admissibilité afin qu'elle contienne $(x_1, x_2) = (0, 0)$!

- Forme standard

$$\begin{cases} x_1, x_2 \geqslant 0, \\ x_1 + x_3 = 2, \\ x_2 + x_4 = 2, \\ x_1 + x_2 - x_5 + x_6 = 1 \\ z = x_1 + x_2, (\max) \\ z' = -x_6 = x_1 + x_2 - x_5 - 1, (\max) \end{cases}$$



Simplexe double phase

- Initialisation du Tableau avec 2 phases !

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	z	z'	
(x_3)	1	0	1	0	0	0	0	0	2
(x_4)	0	1	0	1	0	0	0	0	2
(x_6)	1	1	0	0	-1	1	0	0	1
(z)	-1	-1	0	0	0	0	1	0	0
(z')	-1	-1	0	0	1	0	0	1	-1

solution $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = (0, 0, 2, 2, 0, 1)$ avec $z = 0$ et $z' = -1$.

Simplexe double phase

- Optimisation de la deuxième phase avec le pivot $x_1 \leftrightarrow x_6$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	z	z'	
(x_3)	0	-1	1	0	1	-1	0	0	1
(x_4)	0	1	0	1	0	0	0	0	2
(x_1)	1	1	0	0	-1	1	0	0	1
(z)	0	0	0	0	-1	1	1	0	1
(z')	0	0	0	0	0	1	0	1	0

solution $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = (1, 0, 1, 2, 0, 0)$ avec $z = 1$ et $z' = 0$.

INSA INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES LYON
Pole Math

Simplexe double phase

- Retour au tableau à une phase

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	z	
(x_3)	0	-1	1	0	1	0	1
(x_4)	0	1	0	1	0	0	2
(x_1)	1	1	0	0	-1	0	1
(z)	0	0	0	0	-1	1	1

  solution $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = (1, 0, 1, 2, 0)$ avec $z = 1$.

- Le simplexe double phase nous a permis de trouver une solution initiale $(x_1, x_2) = (1, 0)$ admissible !

Exercice 17

Terminer l'algorithme du simplexe pour trouver la solution du problème de programmation linéaire initial.

Applications

Exercice 18 (Simplexe à deux phases)

Transformez le système suivant en un système équivalent de maximisation, puis résolvez-le par le simplexe à deux phases

$$\begin{cases} 0 \leqslant y_1, y_2, y_3 \\ 2y_1 - y_2 + y_3 \geqslant 3, \\ y_1 + 2y_2 - y_3 \geqslant 2, \\ w = 3y_1 + 2y_2 + y_3 \ (\min) \end{cases}$$

1. Algorithme d'optimisation sur graphe
   - Algorithme du plus court chemin
   - Le problème du flot maximal
   - Problème d'affectation
2. Programmation linéaire
   - Principe de l'algorithme du simplexe
   - Cas particuliers
   - Dualité
3. Chaînes de Markov
   - Chaînes de Markov discrètes
   - Chaînes de Markov Continue
   - Application aux files d'attente

Retour à l'atelier de production

- Deux productions P_1 et P_2
- Trois ressources limitées $R_1(6)$, $R_2(4)$.
- Matrice de consommation :

	R_1	R_2
P_1	3	1
P_2	0	2

- Un profit global à optimiser : P_1 : 3 €/unité, P_2 : 2 €/unité,
  On peut acheter ou vendre des ressources, mais à quel prix ?

Modélisation

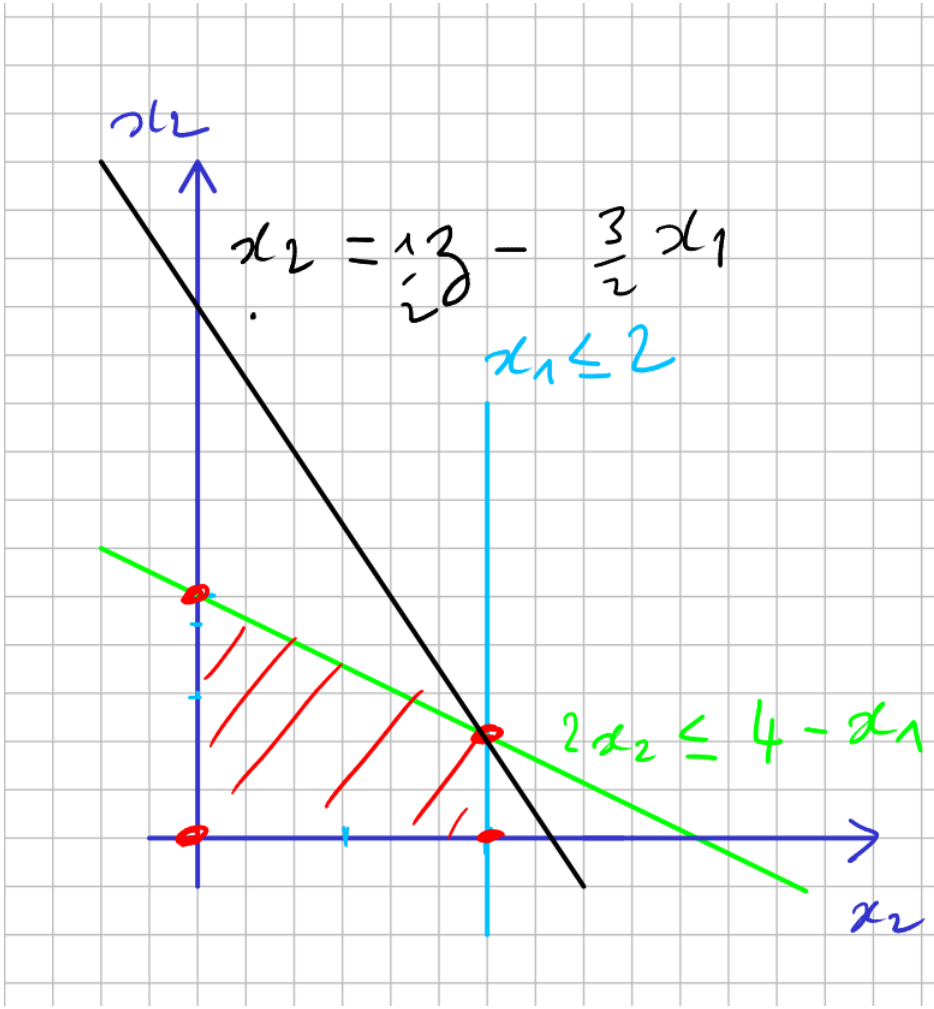
- Variables :
  - variables x_1, x_2 : quantité de production P_1, P_2
  - variables y_3, y_4 : prix des ressources R_1, R_2
- Contraintes : la vente rapporte au moins autant que la production

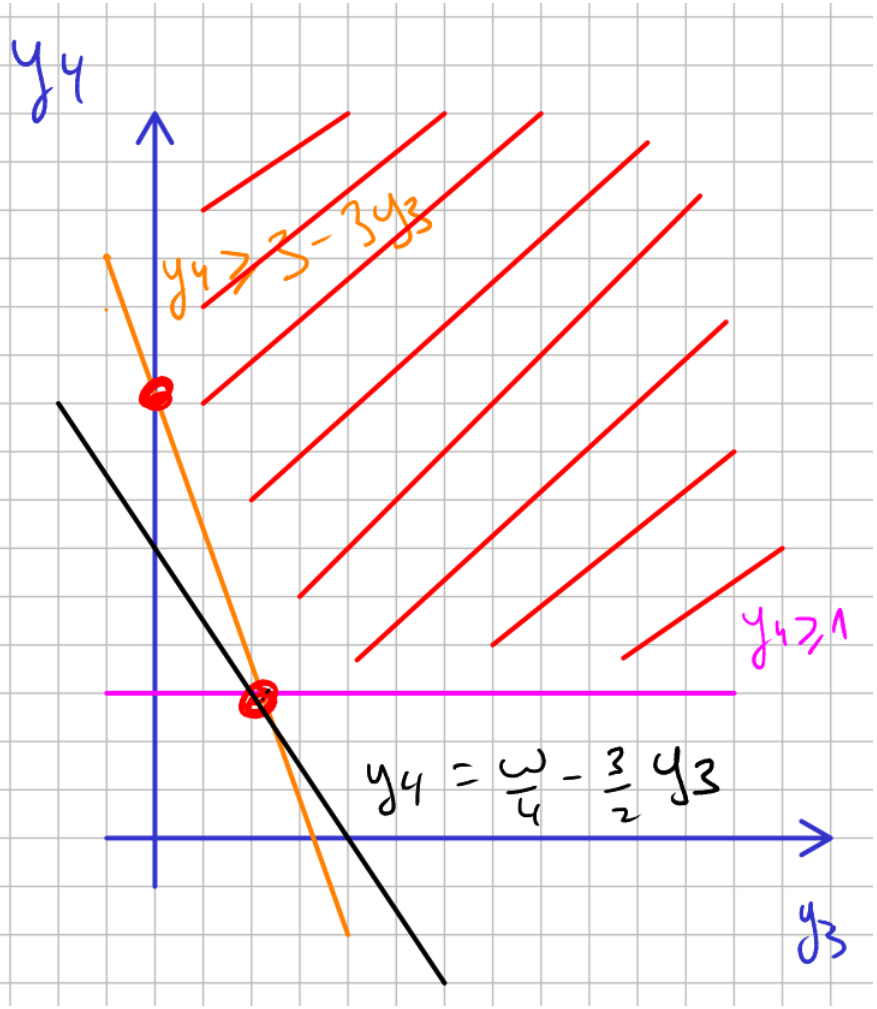
$$\begin{cases} 3y_3 + 1y_4 \geqslant 3 \\ 2y_4 \geqslant 2 \end{cases}$$

- Minimiser la vente du stock entier

$$w = 6y_3 + 4y_4 (\min)$$

Résolution graphique





Formulation problème primal - problème dual

Données :

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}, \text{ et } c = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Définition 17 (Formulation problème primal, problème dual)

Problème primal

$$\begin{cases} x_i \geqslant 0 \\ Ax \leqslant b \\ z = c \cdot x \quad (\max) \end{cases}$$

Problème dual

$$\begin{cases} y_i \geqslant 0 \\ A^t y \geqslant c \\ w = b \cdot y \quad (\min) \end{cases}$$

Avec les variable d'écart

- Problème primal avec variables d'écart

$$\begin{cases} 0 \leqslant x_1, x_2, x_3, x_4 \\ 3x_1 + x_3 = 6 \quad (y_3) \\ x_1 + 2x_2 + x_4 = 4 \quad (y_4) \\ z = 3x_1 + 2x_2 (\max) \end{cases}$$

- Problème dual avec variables d'écart

$$\begin{cases} 0 \leqslant y_1, y_2, y_3, y_4 \\ 3y_3 + y_4 - y_1 = 3 \quad (x_1) \\ 2y_4 - y_2 = 2 \quad (x_2) \\ w = 6y_3 + 4y_4 (\min) \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Correspondance des variables

Point de vue Lagrangien

Définition 18 (Lagrangien)

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(x,y) &= c\cdot x-(Ax-b)\cdot y\\ &= b\cdot y-(A^t y-c)\cdot x\end{aligned}$$

- Problème primal

$$\max_{x\geqslant 0}\left\{\min_{y\geqslant 0}\{\mathcal{L}(x,y)\}\right\}=\max_{x\geqslant 0,Ax\leqslant b}\{c\cdot x\}$$

- Problème dual

$$\min_{y\geqslant 0}\left\{\max_{x\geqslant 0}\{\mathcal{L}(x,y)\}\right\}=\min_{y\geqslant 0,A^t y\leqslant c}\{b\cdot y\}$$

Théorème de dualité

Theorem 6 (Théorème de dualité faible)

Soient x et y deux solutions réalisables du problème primal et du problème dual associé. Alors,

1. $z \leqslant w$
2. *si $z = w$ alors x et y sont des solutions optimales des deux problèmes*

Démonstration.

D'après l'expression du Lagrangien, il suffit de remarque que

$$w - z = b \cdot y - c \cdot x = (A^t y - c) \cdot x - (Ax - b) \cdot y = \sum x_i y_i,$$

qui est bien positif pour des solutions réalisables □

Théorème de dualité

Theorem 7 (Théorème de dualité)

Si le problème primal admet une solution réalisable optimale x^*, alors le problème dual associé admet une solution réalisable optimale y^* et

$$z^* = w^*.$$

On en déduit que $\sum_i x_i^* y_i^* = 0$ et que la base optimale du primal correspond à la hors-base du dual

Théorème de dualité

Theorem 8

Étant donnés un problème primal et son dual, une et une seule des trois situations suivantes peut se produire.

1) *les deux problèmes possèdent chacun des solutions optimales (à l'optimum, les coûts sont égaux).*
2) *un des problèmes possède une solution réalisable avec un optimum infini, l'autre n'a pas de solution.*
3) *aucun des deux problèmes ne possède de solution réalisable.*

Retour à notre problème de production

Initialisation du tableau de simplexe :

Problème primal :

$$\begin{cases} 0 \leqslant x_1, x_2, x_3, x_4 \\ 3x_1 + x_3 = 6 \quad (y_3) \\ x_1 + 2x_2 + x_4 = 4 \quad (y_4) \\ z = 3x_1 + 2x_2 (\max) \end{cases}$$

	x_1	x_2	x_3	x_4	z	
(x_3)	3	0	1	0	0	6
(x_4)	1	2	0	1	0	4
	-3	-2	0	0	1	0

solution : $x = (0, 0, 6, 4)$ avec $z = 0$.

Problème dual :

$$\begin{cases} 0 \leqslant y_1, y_2, y_3, y_4 \\ 3y_3 + 1y_4 - y_1 = 3 \quad (x_1) \\ 2y_4 - y_2 = 2 \quad (x_2) \\ w = 6y_3 + 4y_4 (\min) \end{cases}$$

	y_1	y_2	y_3	y_4	w	
(y_1)	-1	0	3	1	0	3
(y_2)	0	-1	0	2	0	2
	0	0	-6	-4	1	0

solution : $y = (-3, -2, 0, 0)$ avec $z = 0$.

Changement de base

- Problème primal : $x_2 \leftrightarrow x_4$

	x_1	x_2	x_3	x_4	z	
(x_3)	3	0	1	0	0	6
(x_2)	1/2	1	0	1/2	0	2
	-2	0	0	1	1	4

  solution $x = (0, 2, 6, 0)$ avec $z = 4$

- Problème dual : $y_4 \leftrightarrow y_2$

	y_1	y_2	y_3	y_4	w	
(y_1)	-1	1/2	3	0	0	2
(y_4)	0	-1/2	0	1	0	1
	0	-2	-6	0	1	4

  solution $y = (-2, 0, 0, 1)$ avec $w = 4$

- La solution du dual s'identifie sur la dernière ligne du tableau associé au primal

Changement de base

- Changement de base, problème primal $x_1 \leftrightarrow x_3$

	x_1	x_2	x_3	x_4	z	
(x_1)	1	0	1/3	0	0	2
(x_2)	0	1	-1/6	1/2	0	1
	0	0	2/3	1	1	8

- Solutions optimales associées aux problèmes primal et dual

$$x = (2, 1, 0, 0), y = (0, 0, 2/3, 1) \text{ avec } z = w = 8.$$

- Nous obtenons donc les coûts marginaux de chaque ressource

$$R_1 : y_3 = 2/3, R_2 : y_4 = 1.$$

Validité du coût marginal

Propriété 3

Le coût marginal reste valide tant que la base reste optimale !

- Inventaire du Stock : $+\delta$ sur la ressource R_1 :
- Remplacer x_3 par $x'_3 - \delta$

$$3x'_1 + x'_3 = 6 + \delta \Leftrightarrow 3x'_1 + (x'_3 - \delta) = 6$$

	x'_1	x'_2	$x'_3 - \delta$	x'_4	
(x'_1)	1	0	1/3	0	2
(x'_2)	0	1	-1/6	1/2	1
z	0	0	2/3	1	8

	x'_1	x'_2	x'_3	x'_4	
(x'_1)	1	0	1/3	0	$2 + \delta/3$
(x'_2)	0	1	-1/6	1/2	$1 - \delta/6$
z	0	0	2/3	1	$8 + 2\delta/3$

- La solution reste optimale tant qu'elle reste réalisable, c'est à dire

$$2 + \delta/3 > 0 \text{ et } 1 - \delta/6 > 0$$

Applications

Exercice 19 (Simplexe double phases ou dual ?)

On considère le système suivant déjà résolu à l'aide d'un simplexe double phase. Résolvez-le par passage au dual.

$$\begin{cases} 0 \leqslant y_1, y_2, y_3 \\ 2y_1 - y_2 + y_3 \geqslant 3, \\ y_1 + 2y_2 - y_3 \geqslant 2, \\ w = 3y_1 + 2y_2 + y_3 \ (\min) \end{cases}$$

Exercice 20 (Répartition des tâches)

Une société doit répartir trois productions sur trois usines (A, B & C). Une même production peut être divisée entre les différentes usines et le temps de traitement est alors proportionnel à la fraction de la production affectée dans une usine. On désire bien sûr minimiser la durée nécessaire pour réaliser les trois productions.
Les temps de traitement de l'intégralité de chacune des productions dans chacune des usines sont donnés dans le tableau ci-dessous :

	A	B	C
P_1	60	55	50
P_2	70	50	40
P_3	100	80	80

- *Modélisez le problème. Ce problème peut-il se mettre sous forme d'un programme linéaire P en introduisant de nouvelles variables ?*
- *Donnez le dual du problème précédent et donnez les deux premières étapes au moins.*
- *Montrez sur le problème initial qu'il est possible de terminer en 60 jours. Donnez la solution correspondante de P .*

1. Algorithme d'optimisation sur graphe
   - Algorithme du plus court chemin
   - Le problème du flot maximal
   - Problème d'affectation
2. Programmation linéaire
   - Principe de l'algorithme du simplexe
   - Cas particuliers
   - Dualité
3. Chaînes de Markov
   - Chaînes de Markov discrètes
   - Chaînes de Markov Continue
   - Application aux files d'attente

Motivation : agence d'études

- Un technicien, une demande = un jour de travail
- Délai maximum : 3 jours ouvrés après le jours de réception (sinon sous-traitance)
- Demande aléatoire journalière

d	0	1	2	3
$P(D = d)$	0.2	0.6	0.15	0.05

- Questions :
  - % de sous-traitance ?
  - Taux d'activité du technicien ?
  - délai moyen d'attente d'une demande ?

Modélisation

- **Instants d'observation :**
  les soirs des jours ouvrés
- **Qu'observe t'on ?**
  l'état du système = nombre x^n de demandes en cours
- **Processus aléatoire discret :**
  suite de variable aléatoire X^n
- Questions ?
  - calcul de la distribution $v^n = (p_0^n, p_1^n, p_2^n, p_3^n)$?
  - Déterminer la limite de v^n quand $n \to \infty$
  - En déduire les réponses aux questions précédentes

Système markoviens

Propriété 4 (Propriété (faible) de Markov)

Un système satisfait la **propriété de Markov** *lorsque son futur ne dépend de son passé que par l'intermédiaire de son état présent*

Propriété 5 (Processus de Markov discret)

Un processus discret est **Markovien** *lorsque*

$$P(X^{n+k} = x^{n+k} | X^0 = x^O, \cdots X^n = x^n) = P(X^{n+k} = x^{n+k} | X^n = x^n)$$

Définition 19

Un processus est une chaîne de Markov homogène dans le temps si

$$P(X^{n+1} = i \mid X^n = j) = p_{i,j}^n$$

est indépendant de n.

Modélisation

- Loi de demande

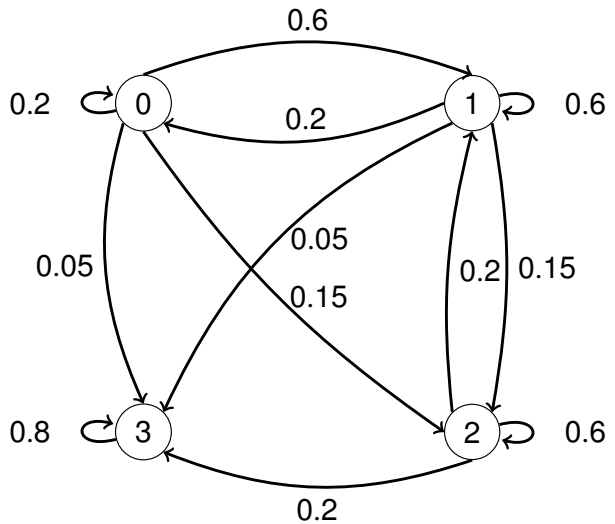
d	0	1	2	3
$P(D = d)$	0.2	0.6	0.15	0.05

- Distribution à l'instant n,

$$v^{n+1} = v^n M,$$

où la matrice de transition M vérifie

$$M = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.6 & 0.15 & 0.05 \\ 0.2 & 0.6 & 0.15 & 0.05 \\ 0 & 0.2 & 0.6 & 0.2 \\ 0 & 0 & 0.2 & 0.8 \end{pmatrix}$$



Propriété de Markov

Définition 20

Une matrice M est dite stochastique si

- *c'est une matrice carrée*
- *chaque ligne est une distribution de probabilité*

Propriété 6

Une chaîne de Markov homogène dans le temps est déterminée par

- *Une distribution de probabilité initial v^0*
- *Un matrice stochastique M*

Le processus associé est markovien au sens faible

Propriété forte de Markov

Définition 21 (Temps d'arrêt)

Un date aléatoire T est un temps d'arrêt du processus si la donnée de $\{x^i, 0 \leqslant i \leqslant n\}$ détermine si $T = n$.

Par exemple la première arrivée dans un état a est un temps d'arrêt

$$T = n \Leftrightarrow \{ x^n = a \text{ et } \forall p \leqslant n, x^p \neq a\}$$

Propriété 7 (Propriété forte de Markov)

- *Si T est un temps d'arrêt associée au processus $\{X^n\}$*
- *Si on sait que les évènement $T < \infty$ et $X_T = i$ sont réalisés*
- *Alors le processus $\{X^{n+T}\}$ est une chaîne de Markov homogène de matrice M et d'état initial i.*

Régime transitoire

- Le processus est entièrement déterminé par la distribution initiale v^0 et la matrice stochastique M :

$$v^n = v^0 M^n$$

- Il suffit de calculer les puissances de M

$$M^2 = \begin{pmatrix} 0.16 & 0.51 & 0.22 & 0.11 \\ 0.17 & 0.51 & 0.22 & 0.11 \\ 0.05 & 0.24 & 0.43 & 0.29 \\ 0 & 0.04 & 0.28 & 0.68 \end{pmatrix}, \quad M^{32} = \begin{pmatrix} 0.062 & 0.246 & 0.308 & 0.384 \\ 0.062 & 0.246 & 0.308 & 0.384 \\ 0.062 & 0.246 & 0.308 & 0.384 \\ 0.062 & 0.246 & 0.308 & 0.384 \end{pmatrix}$$

- La suite M^n admet une limite M^∞ composée ici d'une unique distribution π dite **régime permanent** de la chaîne de Markov

Régime Stationnaire

Définition 22

Une distribution de probabilité μ vérifiant $\mu = \mu M$ est dite un **régime stationnaire** *de la chaine de Markov associée.*

Propriété 8

- *Le régime permanent est stationnaire $\pi = \pi M$.*
- *S'il n'existe qu'un régime stationnaire, il est égal à π.*

Résolution par la méthode matricielle

- Solution de l'équation

$$\pi = \pi M \Leftrightarrow \pi(M - I_d) = 0,$$

- La matrice $(M - I_d)$ n'est pas inversible

$$M - I_d = \begin{pmatrix} 0.8 & -0.6 & -0.15 & -0.05 \\ -0.2 & 0.4 & -0.15 & -0.05 \\ -0 & -0.2 & -0.4 & 0.2 \\ 0 & 0 & -0.2 & 0.2 \end{pmatrix}$$

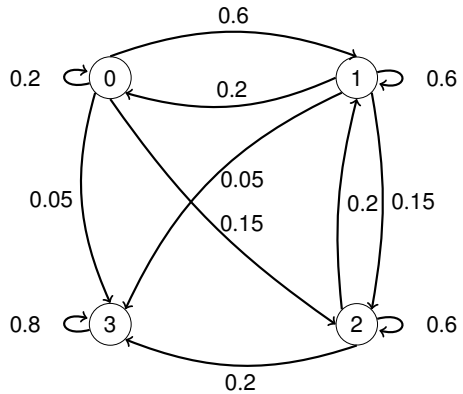
- Modifier la dernière colonne pour prendre en compte l'équation $\sum_i \pi_i = 1$:

$$\pi L = \pi \begin{pmatrix} 0.8 & -0.6 & -0.15 & 1 \\ -0.2 & 0.4 & -0.15 & 1 \\ -0 & -0.2 & -0.4 & 1 \\ 0 & 0 & -0.2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et $\pi = (4/65, 16/65, 20/65, 25/65)$

Résolution par la méthode des coupes

- Equilibre des transfert en régime stationnaire à travers des coupes sur le graphe des transitions



- Application
  - Coupe $\{0\}\{1,2,3\} \Longrightarrow 0.8\pi_0 = 0.2\pi_1 \Longrightarrow \pi_1 = 4\pi_0$
  - Coupe $\{0,1\}\{2,3\} \Longrightarrow 0.2(\pi_0 + \pi_1) = 0.2\pi_2 \Longrightarrow \pi_2 = 5\pi_0$
  - Coupe $\{0,1,2\}\{3\} \Longrightarrow 0.05(\pi_0 + \pi_1) + 0.2\pi_2 = 0.2\pi_3 \Longrightarrow \pi_3 = 6.25\pi_0$
- Distribution de probabilité : $\sum \pi_i = 1$ implique que

$$\pi = \pi_0(1, 4, 5, 6.25) = (4/65, 16/65, 20/65, 25/65)$$

Vitesse de convergence vers l'état permanent

- Distribution à l'instant n

$$v^n = v^0 M^n$$

- Vitesse de convergence ?
  Cela dépend des valeurs propres de M.
- Application
  - Les valeurs propres de M sont $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 0.7732$ et $\lambda_4 = 0.4268$.
  - On observe donc une vitesse de convergence géométrique de raison $\lambda_3 = 0.7732$.
  - Convergence très rapide vers l'état permanent π.

Interprétation des résultats

- Nombre de demandes journalière

$$\overline{D} = 1 \times 0.6 + 2 \times 0.15 + 3 \times 0.05 = 1.05$$

- Taux d'activité :

$$\overline{A} = 1 - \pi_0 = 61/65 \simeq 93.8\%.$$

- Nombre moyen de demande en attente

$$\overline{N} = 0\pi_0 + 1\pi_1 + 2\pi_2 + 3\pi_3 = 131/65$$

- Délai moyen d'attente

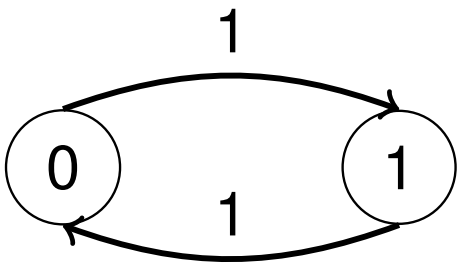
$$\overline{W} = \frac{\overline{N}}{\overline{A}} = 131/61 \simeq 2.148 \text{ jours}$$

- Nombre moyenne de demandes perdues (sous traitance)

$$\begin{aligned} \overline{P} &= 1 \times 0.05\pi_2 + (1 \times 0.15 + 2 \times 0.05)\pi_3 = \frac{29}{260} \\ &= \overline{D} - \overline{A} \end{aligned}$$

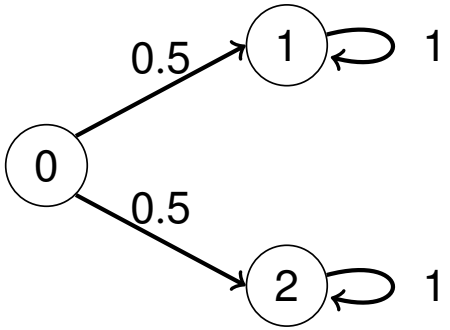
Existence de régime permanent indépendant de l'état initial ?

- Exemple de système périodique



$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } M^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Exemple de système avec une dépendance à l'état initial



$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0.5 & 0.5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } M^2 = M$$

Typologie des classes

Définition 23 (Classe)

Soit G un graphe orienté :

- *Ses classes sont les composantes fortement connexes du graphe*
- *S'il n'y a qu'une composante, le graphe est dit fortement connexe*

Définition 24 (Classe transitoires et finales)

Soit G un graphe orienté

- *une classe sans arc de sorties est dite finale ou fermée*
- *Sinon elle est dite transitoire*

Définition 25 (période)

La période d'un état i est la plus grand diviseur commun des longueurs de circuits passant par i

Existence de régime permanent

Propriété 9

Tous les états d'une classe finale ont la même période.

Propriété 10

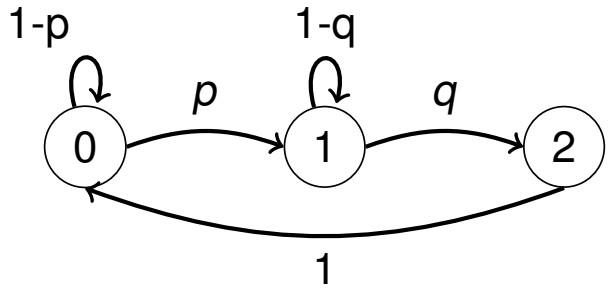
Soit une chaîne de Markov finie dont le graphe admet une seule classe finale dont la période égale à 1 *(classe apériodique), alors*

- *Cette chaîne admet un unique régime permanent* π *indépendant de l'état initial*
- *Pour tous états* i, $\pi_i > 0$ *implique que cet état appartient à la classe finale*
- *Si* $\overline{T}_i$ *désigne* **le temps moyen de retour à l'état** i, *alors*

$$\overline{T}_i = \frac{1}{\pi_i}.$$

Exemple

- Question : Temps moyen $\overline{T}_{0\to 2}$ pour aller de l'état 0 à l'état 2 ?



- Première solution : avec l'espérance d'une loi géométrique :
  - temps moyen pour sortir de l'état 0 : $1/p$
  - temps moyen pour sortir de l'état 1 : $1/q$

$$\Longrightarrow \overline{T}_{0\to 2} = 1/p + 1/q$$

- Deuxième solution : avec l'état stationnaire π
  - Méthode des coupes :

$$\pi = \left(\frac{p^{-1}}{p^{-1}+q^{-1}+1}, \frac{q^{-1}}{p^{-1}+q^{-1}+1}, \frac{1}{p^{-1}+q^{-1}+1} \right)$$

  - Temps de retour à l'état 2 :

$$\overline{T}_2 = p^{-1}+q^{-1}+1 \Longrightarrow \overline{T}_{0\to 2} = \overline{T}_2 - 1 = p^{-1}+q^{-1}$$

INSA INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES LYON
Pole Math

Exercice 21 (Distributeurs)

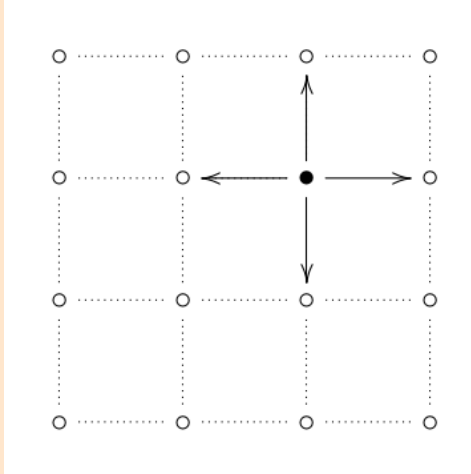
Un technicien installe et répare des distributeurs sur les 3 sites d'une entreprise. Le contrat de maintenance prévoit que les demandes d'intervention sont gérées de la manière suivante :

- *la maintenance a lieu le soir après le service*
- *un seul site est concerné chaque soir*

La probabilité de panne d'un distributeur est supposé égale à 0.2. On admettra que le jour de la panne, un distributeur a fonctionné en moyenne 50% du temps. On suppose ici qu'il n'y a qu'un seul distributeur par site. Calculez alors le taux d'activité du technicien, le nombre moyen de distributeurs en panne au début et à la fin d'une journée. Déduisez-en un taux moyen de couverture des besoins par les distributeurs et le délai moyen de réparation d'un distributeur.

Exercice 22 (Grille)

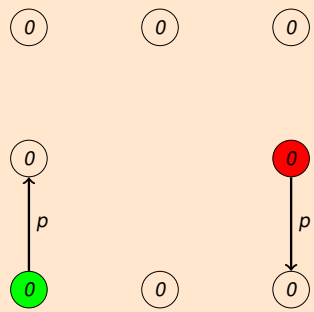
Un pion de déplace aléatoirement sur une grille 4×4 de manière équiprobable jusqu'à sa sortie de la grille.



Si le pion est posé initialement sur une des cases du centre, on désire calculer le nombre moyen de coups du trajet et la probabilité de sortir par une case d'angle. Vous répondrez à cette question en calculant le régime permanent d'une chaîne de Markov appropriée.

Exercice 23 (Course)

Deux pions se déplacent dans le sens horaire sur un circuit de 8 cases aux tops d'une horloge. La probabilité qu'un pion tente d'accéder à la case suivante est notée p. Cette tentative est couronnée de succès si la case est libre et échoue sinon. Plus précisément, lorsque les deux pions occupent deux cases contigues, seul le pion placé devant peut se déplacer.



Modélisez le système sous forme d'une chaîne de Markov discrète. Dans le cas où $p = 1/2$ *, déduisez-en le nombre moyen de coups nécessaire pour faire un tour.*

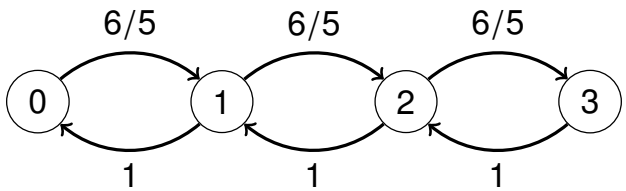
1. Algorithme d'optimisation sur graphe
   - Algorithme du plus court chemin
   - Le problème du flot maximal
   - Problème d'affectation
2. Programmation linéaire
   - Principe de l'algorithme du simplexe
   - Cas particuliers
   - Dualité
3. Chaînes de Markov
   - Chaînes de Markov discrètes
   - Chaînes de Markov Continue
   - Application aux files d'attente

Introduction

- **Chaîne de Markov discrètes :**
  - Observation échantillonnée d'un système
  - Propriété de Markov
  - Etat permanent
- **L'observation en continu est-elle possible ?**
- **Cadre du cours :**
  - Nombre fini d'états
  - Homogénéité dans le temps
  - Hypothèses induites par la propriété de Markov ?

Motivation : un guichet dédié à un service spécifique

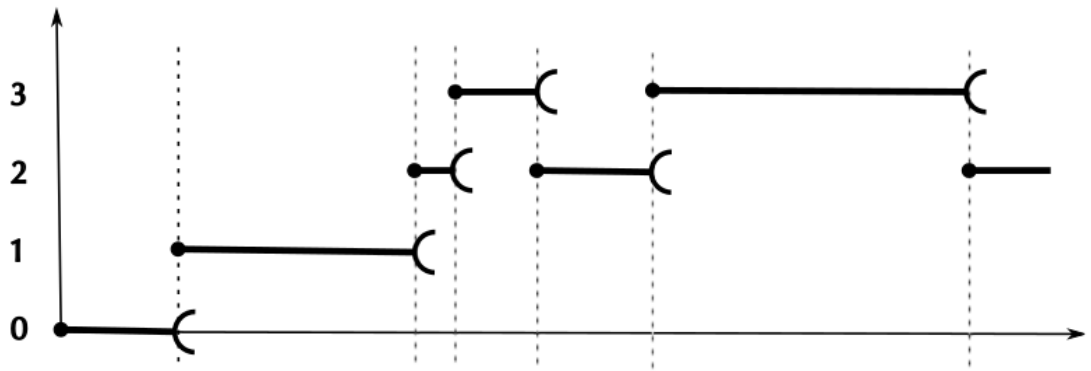
- Un technicien, des clients
- Une demande = durée aléatoire de travail d'espérance 1h
- Arrivée des clients : 1 demande toutes les 50 minutes en moyenne
- Comportement des clients : dépose une demande si l'espérance du temps de délai T est inférieur à 3h



- Questions : % de perte ? taux d'activité ? délai moyen d'attente ?

Modélisation

- **Observation en continue :** $X(t)$ pour $t \geqslant 0$
- $J_0, J_1 \cdots$: **les temps de saut** de $(X_t)_{t \geqslant 0}$
- $S_1, S_2, \cdots$: les **temps d'attente**
- **la chaîne incluse** $(Y_n)_n$ avec $Y_n = X_{J_n}$ représente le processus discret de changement d'état.
- Exemple de trajectoire possible du système



- Questions : calcul de $v(t)$? Régime permanent ? Espérance des différentes variables aléatoires ?

Chaine de Markov continue

Définition 26

Le processus $(X_t)_{t\geqslant 0}$ est une chaîne de Markov à temps continue si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, tous $0 \leqslant t_0 \leqslant t_1 \leqslant \cdots \leqslant t_{n+1}$ et pour tous états $i_0, i_1, \cdots i_{n+1}$,

$$P(X_{t_{n+1}} = i_{n+1} \mid X_{t_0} = i_0, \cdots X_{t_n} = i_n) = p_{i_n i_{n+1}}(t_{n+1} - t_n).$$

Propriété 11

Pour tout $t \geqslant 0$, $P(t) = (p_{ij}(t))_{ij}$ est une matrice stochastique vérifiant la propriété de semi-groupe

$$P(t+s) = P(t)P(s)$$

Générateur

Définition 27

Soit I un espace dénombrable. Un **générateur** *sur I est une matrice $Q = (q_{ij})_{i,j\in I}$ vérifiant*

- *Pour tout $i \in I$, $0 \leqslant -q_{ii} < \infty$,*
- *pour tous $s \neq j$, $q_{ij} \geqslant 0$,*
- *pour tous $i \in I$, $\sum_{j\in I} q_{ij} = 0$.*

Par la suite, on note $q_i = -q_{i,i}$.

Propriété 12

- *Si Q est un générateur, alors $(P(t))_{t\geqslant 0}$ définie par $P(t) = exp(tQ)$ est un semi-groupe stochastique.*
- *Si $(P(t))_{t\geqslant 0}$ est un semi-groupe stochastique, alors il existe un générateur Q tel que $P(t) = exp(tQ)$.*

Générateur

Propriété 13

Si le processus $(X_t)_{t\geqslant 0}$ est une chaîne de Markov à temps continue de générateur Q. Alors

- *Conditionnellement à $Y_0 = i_0, \cdots Y_{n-1} = i_{n-1}$, les temps d'attente $S_1, \cdots, S_n$ sont des v.a. exponentielles indépendantes de paramètres respectifs $q_{i_0} \cdots q_{i_n}$*
- *$(Y_n)_n$ est une chaîne de Markov à temps discret de matrice de transition Π définie par*

$$\pi_{i,j} = \begin{cases} q_{ij}/q_i \text{ si } j \neq i \text{ et } q_i \neq 0 \\ 0 \text{ si } j \neq i \text{ et } q_i \neq 0 \\ 0 \text{ si } j = i \text{ et } q_i \neq 0 \\ 1 \text{ si } j = i \text{ et } q_i = 0 \end{cases}$$

Rappel : loi exponentielle

Soit T est une loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$

- Loi :

$$P(T > t) = \exp(-\lambda t)$$

- Loi sans mémoire :

$$P(T > t + s \mid T > s) = P(T > t)$$

- Espérance :

$$E(T) = \lambda^{-1}$$

Si $(T_1, \cdots T_n) \to \mathcal{E}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots \lambda_n))$ est un vecteur indépendants, alors

- Stabilité du min :

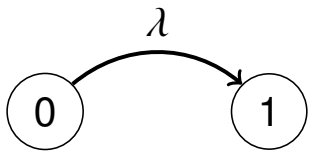
$$Y = \min(T_1, \cdots, T_n) \to \mathcal{E}(\lambda_1 + \lambda_2 + \cdot + \lambda_n)$$

- Loi des sauts

$$P(Y = T_i) = \frac{\lambda_i}{\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots \lambda_n}$$

Exemple avec 2 états

- Exemple avec 2 états et 1 arrête de transition



- Générateur Q et matrice de loi P

$$Q = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ and } P(t) = \begin{pmatrix} \exp(-\lambda t) & 1 - \exp(-\lambda t) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

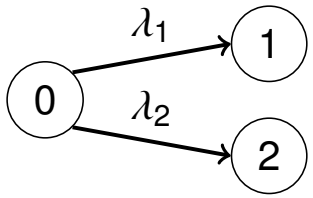
  On retrouve bien un loi exponentielle avec un temps moyen dans l'état 0 égale à $1/\lambda$!

- Matrice des sauts

$$\Pi = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exemple avec 3 états

- Exemple avec 3 états et 2 arrêtes de transition



- Générateur Q

$$Q = \begin{pmatrix} -(\lambda_1+\lambda_2) & \lambda_1 & \lambda_2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

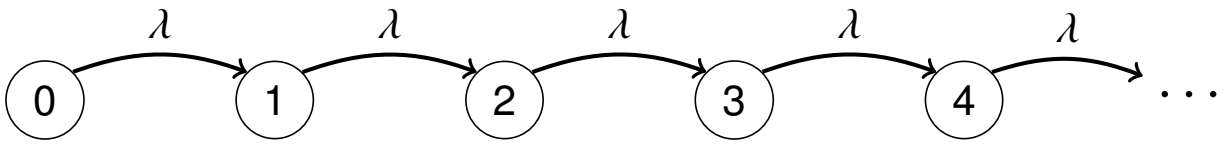
- Matrice de loi P

$$P(t) = \begin{pmatrix} \exp(-(\lambda_1+\lambda_2)t) & \dfrac{\lambda_1(1-\exp(-(\lambda_1+\lambda_2)t))}{\lambda_1+\lambda_2} & \dfrac{\lambda_2(1-\exp(-(\lambda_1+\lambda_2)t))}{\lambda_1+\lambda_2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Matrice des sauts

$$\Pi = \begin{pmatrix} 0 & \lambda_1/(\lambda_1+\lambda_2) & \lambda_2/(\lambda_1+\lambda_2) \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Rappel : Processus de Poisson



Propriété 14 (Processus de Poisson)

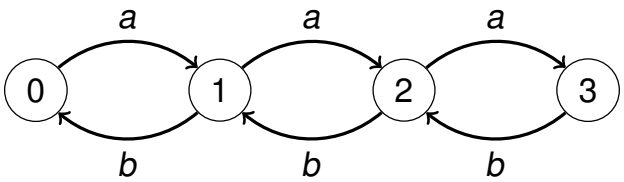
Pour un processus $X(t)$ d'arrivée d'évènements, il y a équivalence entre :

- *Les temps d'inter-arrivées S_i suivent des lois exponentielles $\mathcal{E}(\lambda)$ indépendantes*
- *Pour tout instant t, le nombre d'arrivée $X(t)$ survenues à cet instant suit une loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda t)$*
- *Si k arrivées ont eu lieu dans l'intervalle $[0, t]$, les instants d'arrivées $J_0 < J_1 > \cdots < J_k$ forment un k-échantillonnée ordonnée de la loi uniforme sur $[0, T]$*

Un tel processus est dit **un processus de Poisson** *de tau λ*

Retour à l'exemple

- Un technicien, des clients, des demandes



- Générateur Q et matrice des sauts Π

$$Q = \begin{pmatrix} -a & a & 0 & 0 \\ b & -(a+b) & a & 0 \\ 0 & b & -(a+b) & a \\ 0 & 0 & b & -b \end{pmatrix} \text{ et } \Pi = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{b}{a+b} & 0 & \frac{a}{a+b} & 0 \\ 0 & \frac{b}{a+b} & 0 & \frac{a}{a+b} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- Questions : % de perte ? taux d'activité ? délai moyen d'attente ?
- $\Rightarrow$ calculer le régime permanent ?

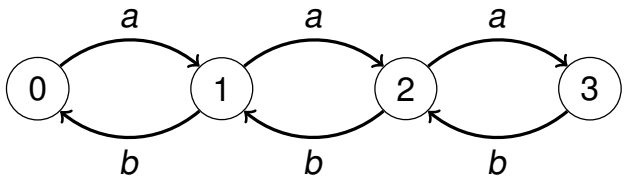
Existence d'un régime permanent

- **Régime transitoire ?**
  Il faudrait calculer $P(t) = \exp(tQ)$?
- **Régime permanent ?**
  Dans le cas fini et homogène, il est identique à celui de la chaîne discrète de matrice $M(t)$
- Existence ?
  Une seule composante fortement connexe, apériodique ?
  $\Rightarrow$ existence d'un unique régime permanent indépendant π de la distribution initiale $v(0)$
- Chercher π parmi les **régimes stationnaires**
  - Résolution d'un système linéaire

$$\pi Q = (0, 0, 0, 0) \text{ avec en plus } \sum \pi_i = 1$$

  - En utilisant la méthode de coupes

Calcul par la méthode des coupes



- Coupe $\{0\}\{1,2,3\}$: $a\pi_0 = b\pi_1 \Rightarrow \pi_1 = \alpha\pi_0$ avec $\alpha = a/b$
- Coupe $\{0,1\}\{2,3\}$: $a\pi_1 = b\pi_2 \Rightarrow \pi_2 = \alpha^2\pi_0$
- Coupe $\{0,1,2\}\{3\}$: $a\pi_2 = b\pi_3 \Rightarrow \pi_3 = \alpha^3\pi_0$
- Avec $\pi_0 + \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1$, on en déduit que $\pi_0 = \dfrac{1-\alpha}{1-\alpha^4}$ et

$$\pi = (0.1863, 0.2235, 0.2683, 0.3219)$$

Performance du système

- **Taux d'activité :** $1 - \pi_0 = 81.4\%$
- **Perte de clients ?** $\pi_3 \simeq 32\%$ de clients perdus
- **Délai moyen d'attente ?**
  - Nombre moyen de demandes en cours :

$$\overline{N} = \pi_1 + 2\pi_2 + 3\pi_3 \simeq 1.726$$

  - Taux d'entrée des demandes :

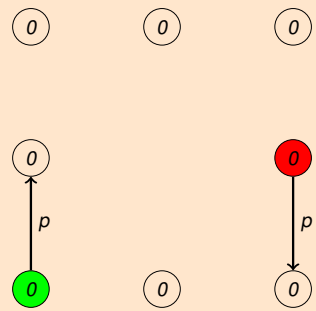
$$\lambda_e = a(1 - \pi_3) = 0.814$$

  - Délai moyen :

$$\overline{W} = \frac{\overline{N}}{\lambda_e} \simeq 2.12$$

Exercice 24 (Course)

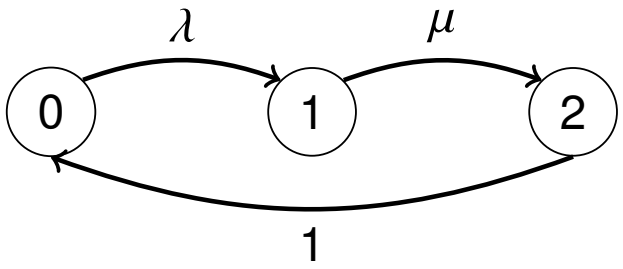
Deux pions se déplacent dans le sens horaire sur un circuit de 8 cases aux tops d'une horloge. le pion accède à la case libre suivante au bout d ?une durée aléatoire de loi exponentielle de paramètre $\lambda = 1/2$.



Modélisez le système sous forme d'une chaîne de Markov continue. Déduisez-en le nombre moyen de coups nécessaire pour faire un tour.

Autre exemple

Calculer le temps moyen $T_{0\to 2}$ pour aller de l'état 0 à l'état 2 ?



- Calcul du régime permanent par la méthode de coupe
  - Coupe $\{0\}\{1,2\}$: $\lambda\pi_0 = \pi_2 \Rightarrow \pi_0 = \lambda^{-1}\pi_2$
  - Coupe $\{0,1\}\{2\}$: $\mu\pi_1 = \pi_2 \Rightarrow \pi_1 = \mu^{-1}\pi_2$
  - Avec $\pi_0 + \pi_1 + \pi_2 = 1$, on en déduit que $\pi^2 = (1 + \lambda^{-1} + \mu^{-1})^{-1}$

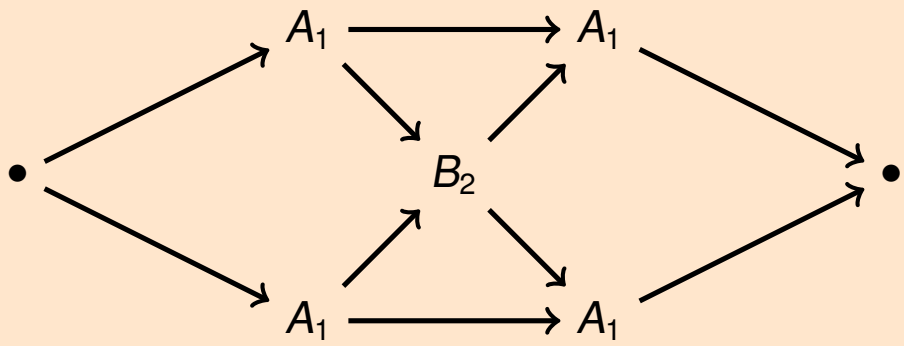
$$\pi = \left(\frac{\lambda^{-1}}{\lambda^{-1} + \mu^{-1} + 1}, \frac{\mu^{-1}}{\lambda^{-1} + \mu^{-1} + 1}, \frac{1}{\lambda^{-1} + \mu^{-1} + 1} \right)$$

- On en déduit le temps moyen $\overline{T}_{0\to 2}$ en remarquant que

$$\pi_2 = \frac{1}{1 + \overline{T}_{0\to 2}} \quad \Rightarrow \quad \overline{T}_{0\to 2} = \pi_2^{-1} - 1 = \lambda^{-1} + \mu^{-1}$$

Exercice 25 (Diagramme de fiabilité)

Un montage utilise plusieurs composants électroniques dont les durées de vie suivent des lois exponentielles. Un diagramme résume le lien entre la durée de vie du système et celles des composants :



Tant qu'un chemin reste valide, le système fonctionne.

L'indice de chaque composant indiquant son espérance de vie en k heures, calculez celle du système.

Exercice 26 (Types de clients)

Un système reçoit deux types de clients A et B. Les processus d'arrivée sont supposés poissoniens de taux respectifs λ_A et λ_B.

Le système ne peut traiter qu'un client à la fois et peut accueillir deux clients en attente (les premiers arrivés). Les clients trouvant le système saturé sont définitivement perdus. Le temps de traitement d'un client est indépendant du type, de loi exponentielle et d'espérance $1/\lambda$. Mais le fait de changer de type de clients entraine un surcoût en temps qui augmente le temps de traitement du second client de 20%.

- *On suppose ici que $\lambda = 2\lambda_A = 2\lambda_B$. Modélisez le système si on traite les clients par ordre d'arrivée. Déduisez-en le pourcentage de clients perdus de chaque type.*
- *Quels seraient les gains d'une politique consistant à traiter en priorité les clients de même type que celui en train d'être servi.*
- *On suppose ici que $2\lambda = 3\lambda_A = 6\lambda_B$. Modélisez le système. Comment pourrait-on calculer le pourcentage de clients perdus de chaque type et le temps moyen d'attente d'un client de chaque type ?*

1. Algorithme d'optimisation sur graphe
   - Algorithme du plus court chemin
   - Le problème du flot maximal
   - Problème d'affectation
2. Programmation linéaire
   - Principe de l'algorithme du simplexe
   - Cas particuliers
   - Dualité
3. Chaînes de Markov
   - Chaînes de Markov discrètes
   - Chaînes de Markov Continue
   - Application aux files d'attente

Motivation

Atelier dédié aux retours de clients

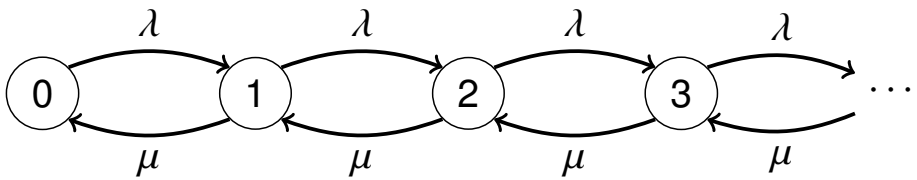
- Un technicien par poste
- Besoin de pièce spécifiques pour chaque réparation
- Un magasinier va chercher les pièces
- Observation de l'atelier :
  - Temps moyen de service : 3 minutes
  - Temps moyen entre deux demande : 5 minutes
  - Lois exponentielles

- Questions
  - Nombre moyen de techniciens en attente ?
  - Temps moyen d'attente des techniciens ?
  - Temps moyen de travail du magasinier ?

Modélisation

avec une chaîne de Markov continue

- Etat : nombre de techniciens devant le magasinier



- Un serveur : le magasinier
  - **taux de service :** $\mu = 60/3$
  - **taux de sortie :** $\mu_e = (1 - \pi_0)\mu$
- Des clients : les techniciens
  - **taux d'arrivée :** $\lambda = 60/5$
  - **taux d'entrée :** $\lambda_e = \lambda$

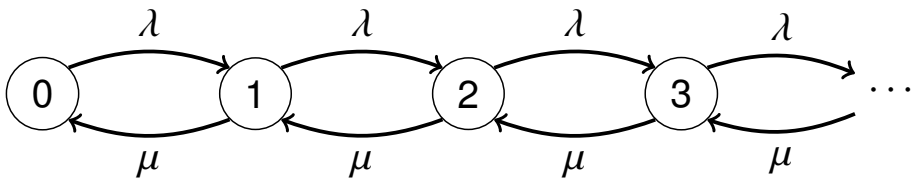
Propriété 15

Il n'y a pas de perte : $\lambda_e = \mu_e$

Modélisation

avec un chaîne de Markov continue

- Etat : nombre de techniciens devant le magasinier



- Des clients : les techniciens
  - **Nombre moyen de clients :**

$$\overline{N} = \sum_i i\pi_i.$$

  - **Temps moyen d'attente :**

Propriété 16 (Loi de Little)

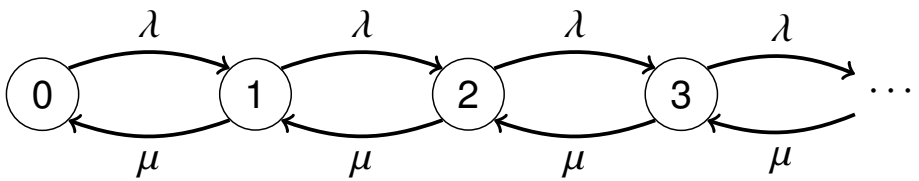
$$\overline{W} = \overline{N}/\lambda_e.$$

Notation de Kendall

- Notation : $A/B/C/K/N/S$
  - A : loi d'arrivée des clients
  - B : loi des services
  - C : Nombre de serveurs
  - K : capacité de la file
  - N : Taille de la population
  - S : discipline de service
- Conventions
  - M = loi exponentielle
  - D = loi constante (Déterministe)
  - G = loi quelconque
  - K et N omis si infinis
  - S omis si traitement ordre arrivée

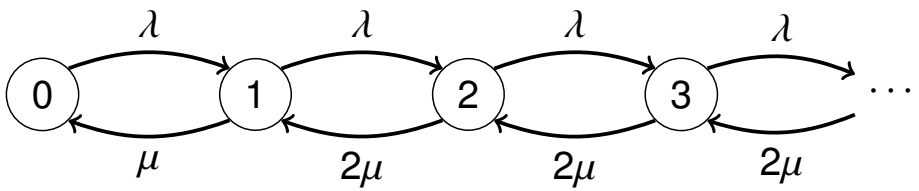
Exemple de files d'attente classiques

- MM1



  - **taux de service :** μ, **taux de sortie :** $\mu_e = (1 - \pi_0)\mu$
  - **taux d'arrivée :** λ, **taux d'entrée :** $\lambda_e = \lambda$

- MM2

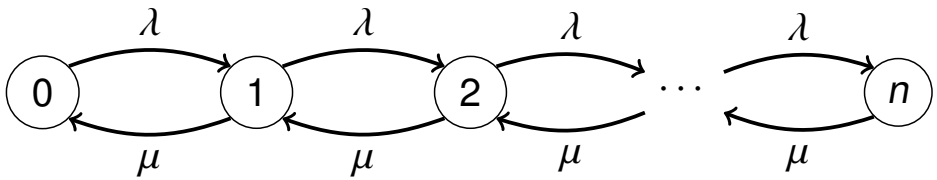


  - **taux de service :** μ, **taux de sortie :** $\mu_e = (2 - \pi_1 - 2\pi_0)\mu$
  - **taux d'arrivée :** λ, **taux d'entrée :** $\lambda_e = \lambda$

INSA INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES LYON
Pole Math

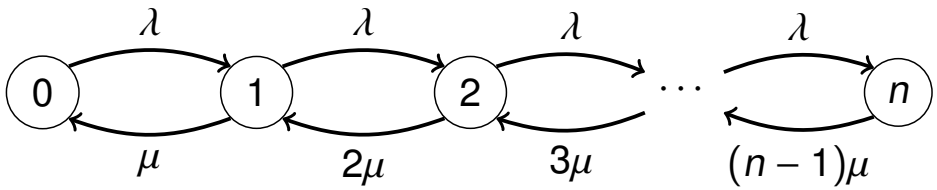
Exemple de files d'attente classiques

- MM1n



  - **taux de service :** μ, **taux de sortie :** $\mu_e = (1 - \pi_0)\mu$
  - **taux d'arrivée :** λ, **taux d'entrée :** $\lambda_e = \lambda(1 - \pi_n)$

- MMnn



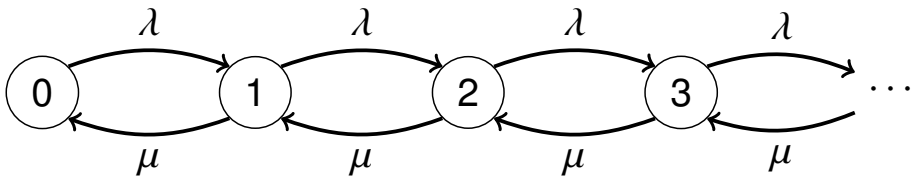
  - **taux de service :** μ, **taux de sortie :** $\mu_e = \sum_{i=0}^{n} i\mu\pi_i$
  - **taux d'arrivée :** λ, **taux d'entrée :** $\lambda_e = \lambda(1 - \pi_n)$

Existence d'un régime permanent

Remarque 2

L'utilisation de chaîne infinie implique la **possibilité de fuite à l'infini**.
En particulier, la limite d'une suite de distributions de probabilités n'est pas forcément une distribution de probabilité

Cas de la file d'attente MM1



- Fuite à l'infini possible si $\alpha = \lambda/\mu \geqslant 1$
- Existence d'un régime permanent si $\alpha = \lambda/\mu < 1$
  - Résolution par la méthode de coupes :

$$\pi_i = \alpha\pi_{i-1} = \alpha^i\pi_0 = \alpha^i(1-\alpha) \text{ avec } \sum \pi_i = 1$$

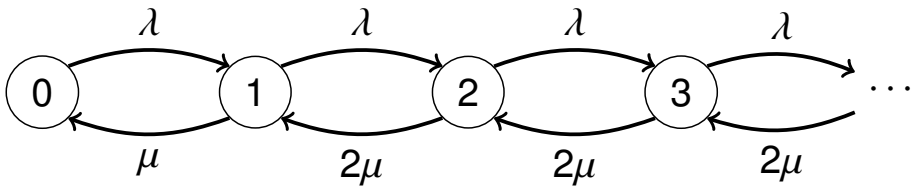
  - **Nombre de clients moyen**

$$\overline{N} = \sum_i i\pi_i = \alpha(1-\alpha)\sum_i i\alpha^{i-1} = \frac{\alpha}{1-\alpha} = \frac{\lambda}{\mu-\lambda}$$

  - **Temps d'attente moyen**

$$\overline{W} = \frac{\overline{N}}{\lambda_e} = \frac{1}{\mu-\lambda}$$

Cas de la file d'attente MM2



- Fuite à l'infini possible si $\beta = \dfrac{\lambda}{2\mu} \geqslant 1$
- Existence d'un régime permanent si $\beta < 1$
  - Résolution par la méthode de coupes :

$$\pi_1 = 2\beta\pi_0 \text{ et } \pi_i = \beta\pi_{i-1} = 2\beta^i\pi_0 = 2\beta^i \frac{1-\beta}{1+\beta} \text{ avec } \sum \pi_i = 1$$

  - **Nombre de clients moyen**

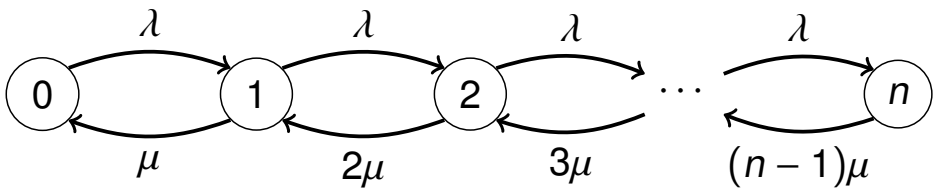
$$\overline{N} = \sum_i i\pi_i = 2\beta\frac{1-\beta}{1+\beta}\sum_i i\beta^{i-1} = \frac{2\beta}{1-\beta^2} = \frac{4\mu\lambda}{4\mu^2-\lambda^2}$$

  - **Temps d'attente moyen**

$$\overline{W} = \frac{\overline{N}}{\lambda_e} = \frac{4\mu}{4\mu^2-\lambda^2}$$

INSA INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES LYON
Pole Math

Cas de la file d'attente MMnn



- Existence d'un régime permanent assuré par la perte des clients !
  - Résolution par la méthode de coupes ($\alpha = \lambda/\mu$)

$$\pi_i = \frac{\alpha}{i}\pi_{i-1} = \frac{\alpha^i}{i!}\pi_0 = \frac{\frac{\alpha^i}{i!}}{1 + \alpha + \frac{\alpha^2}{2!} + \cdots \frac{\alpha^n}{n!}} \text{ avec } \sum \pi_i = 1$$

  - **Temps d'attente moyen**

$$\overline{W} = 1/\mu$$

    Aucune attente avant d'être servi !
  - **Nombre de clients moyen**

$$\overline{N} = \sum_i i\pi_i = \overline{W}\lambda_e = \alpha(1 - \pi_n)$$

INSA INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES LYON
Pole Math

Exercice 27 (Taxis)

Une station de taxis est implantée à la sortie d'un centre commercial.
Les taxis y arrivent suivant un processus de Poisson de taux $\lambda = 12h^{-1}$. Ils ne repartent que lorsqu'ils ont chargé un client.
Les clients désireux de prendre un taxi arrivent à la station suivant un processus de Poisson de taux $\lambda = 20h^{-1}$. Mais ils renoncent à attendre s'ils observent trop de clients en attente, et dans ce cas marchent jusqu'à une station de bus voisine. Pour simplifier, on suppose le comportement des clients uniforme et qu'un client observant trois clients déjà en attente renonce.

- *Modélisez le système. Cette file d'attente est-elle d'un type connu ? Qui attend qui et quel est le serveur de ce système ?*
- *Déterminez le nombre moyen de taxis en attente de clients, et le temps moyen de cette attente.*
- *Déterminez le nombre moyen de clients en attente de taxis, et le temps moyen de cette attente.*

Exercice 28 (Bibliothèque)

Une bibliothèque, en cours de rénovation, désire offrir une nouvelle salle de consultation informatique équipée de n postes.
L'expérience montre qu'en moyenne 15 *étudiants par heure utilisent une telle salle et que la durée moyenne d'utilisation d'un poste est de* 30 *minutes. Pour simplifier l'étude, on suppose toutes les durées de lois exponentielles. On suppose qu'un étudiant trouvant la salle saturée est définitivement perdu. L'étude doit déterminer la valeur de n, afin que le pourcentage d'étudiants perdus soit strictement inférieur à* 10%*.*

- *On suppose n infini. Déterminez k tel que la probabilité qu'au moins k postes soient occupés soit inférieure à* 10%*.*
- *Peut-on prendre* $n = k$ *?*

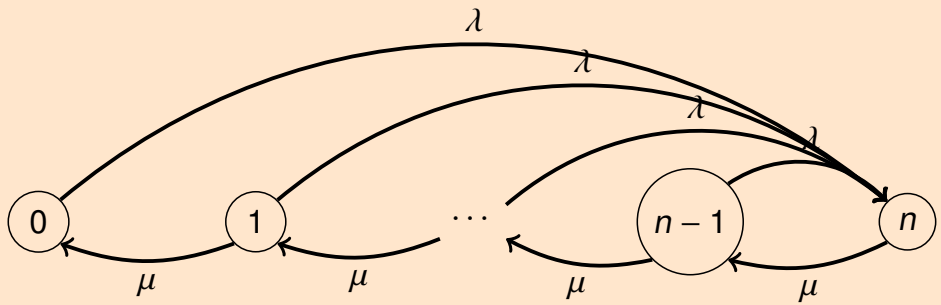
Exercice 29 (Guichet)

Une banque reçoit en moyenne 12 clients par heure. La durée moyenne d'une transaction est de 4 minutes. Les clients attendent devant un panneau électronique qui leur indique si un guichet se libère et quel est ce guichet. Un préposé et une cadre intermédiaire sont en charge de l'accueil des clients aux guichets. Pour simplifier l'étude, on suppose toutes les durées de lois exponentielles.

- *Le préposé seul s'occupe des clients. Un client renonce définitivement à entrer s'il trouve à son arrivée au moins 3 clients en attente d'un préposé. Quels sont le pourcentage de clients perdus, le nombre moyen de clients présents dans la banque et le temps moyen d'attente d'un client avant d'accéder à un guichet ?*
- *La cadre décide d'aider le préposé en ouvrant un deuxième guichet lorsqu'une cinquième personne se présente (et accepte d'attendre). Elle ferme son guichet lorsqu'ayant terminé de servir un client, elle observe au plus deux clients dans la banque. Répondez aux mêmes questions que précédemment.*

Exercice 30 (Station Velo's à la Croix-Rousse)

On considère la chaîne de Markov ci-dessous :



- *Justifier une telle modélisation ?*
- *On considère le cas* $n = 10$, $\lambda = \mu = 1/5$ *(unité de temps = minute). Déterminez le régime permanent. Calculez le nombre moyen de clients présents, le taux d'entrée et le temps moyen de présence d'un client.*
- *On considre le cas* $n = 10$, $= 1$. *Déterminez le régime permanent en fonction de* λ *et de* π_0.