MA2-Equations différentielles ordinaires Equations aux dérivées partielles

Elie Bretin, Département GE, INSA de Lyon

February 6, 2023

Plan du cours

1. Équations différentielles ordinaires
   - Exemples et motivations
   - Cas linéaire d'ordre 1 et 2
   - Existence, unicité, stabilité
   - Equation différentielle linéaire dans le plan à coefficient constant
   - Analyse qualitative et stabilité
2. Equations aux dérivées partielles
   - Exemples d'EDP et motivations
   - Opérateurs différentiels et propriétés
   - Intégrales de surfaces et formule de Green
   - EDP et Modélisation
   - Exemples de résolution dans $\mathbb{R}^d$
   - Exemples de résolution dans ensemble borné Ω

Motivation

On s'intéresse aux propriétés qualitatives des solutions d'équations différentielles ordinaires (EDO)

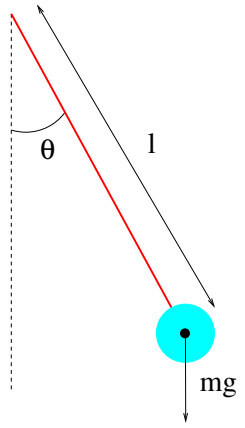
$$\begin{cases} y'(t) = f(y(t), t) \\ y(t_0) = y_0 \in \mathbb{R}^n, \end{cases}$$

où $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est supposée suffisamment régulière.

- Existence, unicité
- Stabilité par rapport à la condition initiale
- Solution stationnaire et comportement asymptotique

Exemple 1 : Le pendule

$$\begin{cases} m\ell\theta'' = -\alpha\ell\theta' - mgsin(\theta) \\ \theta(0) = \theta_0, \text{ et } \theta'(0) = \theta'_0, \end{cases}$$



Le problème peut se réécrire sous la forme (1) avec

$$y = \begin{pmatrix} \theta \\ \theta' \end{pmatrix}, \quad f(y,t) = \begin{pmatrix} y_2 \\ -\frac{\alpha}{m}y_2 - \frac{g}{\ell}sin(y_1) \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad y(0) = \begin{pmatrix} \theta_0 \\ \theta'_0 \end{pmatrix},$$

- Existence de solution ?
- Fréquence d'oscillation du pendule ?

Exemple 2 : Pêche en Méditerranée avec les équations de prédation de Lotka-Volterra

Impact des quotas de pêche en Méditerranée sur les populations de thons et de sardines ?

- Inconnues: population de thons $\tau(t)$ et de sardines $s(t)$
- La quantité de sardines augmente naturellement mais elles sont mangées par les thons et sont pêchées :

$$s'(t) = c_s s(t) - d_s s(t)\tau(t) - p_s,$$

- La quantité de thons augmente en présence de sardines mais diminue dans le cas contraire et sont pêchées :

$$\tau'(t) = c_\tau s(t)\tau(t) - d_\tau \tau(t) - p_\tau$$

- Solutions stationnaires en fonction des paramètres de l'EDO ?

Exemple 3 : Rentrée atmosphérique

On cherche à établir le point d'impact sur Terre d'un vaisseau en phase de rentrée atmosphérique

- Inconnue: position du vaisseau $x(t) \in \mathbb{R}^3 \setminus B(0, R_T)$,
- Force gravitationnelle

$$F_G = -\frac{G m_s m_T}{|x(t)|^3} x(t),$$

- Force de frottement

$$F_F = -\alpha(|x(t)|)|x'(t)|x'(t).$$

- Lois de Newton

$$m_s x'' = F_G + F_F = -\frac{G m_s m_T}{|x(t)|^3} x(t) - \alpha(|x(t)|)|x'(t)|x'(t).$$

- Existence de solution? Stabilité de la solution? Contrôle de la solution ?

Motivation

1. Équations différentielles ordinaires
   - Exemples et motivations
   - Cas linéaire d'ordre 1 et 2
   - Existence, unicité, stabilité
   - Equation différentielle linéaire dans le plan à coefficient constant
   - Analyse qualitative et stabilité

2. Equations aux dérivées partielles

Equation linéaire d'ordre 1

- Equation linéaire homogène d'ordre 1:
  Soit $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Les solutions de l'équation $y'(t) + \alpha(t)y(t) = 0$ sont de la forme

$$y(t) = c \exp\left(-\int_0^t \alpha(s)ds\right).$$

- Formule de Duhamel et variations de la constante:
  Soient $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $\beta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ des fonctions continues. les solutions de l'équation différentielle

$$y'(t) + \alpha(t)y(t) = \beta(t)$$

  sont de la forme

$$y(t) = c \exp\left(-\int_0^t \alpha(s)ds\right) + \int_0^t \beta(s) \exp\left(-\int_s^t \alpha(\tau)d\tau\right) ds.$$

Equation linéaire d'ordre 1

Exercice

Déterminer les solutions des EDO suivantes :

$$y' + ty = t$$

et

$$(1 - t^2)y' - ty = 0.$$

Cas d'équations homogènes d'ordre 2

- L'ensemble des solutions de l'équation

$$y''(t) + \omega^2 y(t) = 0,$$

sont de la forme

$$\begin{aligned} y(t) &= c_1 \exp(i\omega t) + c_{-1} \exp(-i\omega t) \\ &= a_1 \cos(\omega t) + b_1 \sin(\omega t) \end{aligned}$$

- L'ensemble des solutions de l'équation

$$y''(t) - \omega^2 y(t) = 0$$

sont de la forme

$$\begin{aligned} y(t) &= c_1 \exp(\omega t) + c_{-1} \exp(\omega t) \\ &= a_1 ch(\omega t) + b_1 sh(\omega t) \end{aligned}$$

Cas d'équations homogènes d'ordre 2

Plus généralement, la forme de l'ensemble des solutions de l'équation

$$ay''(t) + by'(t) + cy(t) = 0$$

dépend des propriétés des racines du polynôme caractéristique

$$p(X) = aX^2 + bX + c$$

- Si p admet 2 racines simples λ_1 et λ_2 alors y est de la forme

$$y(t) = c_1 \exp(\lambda_1 t) + c_2 \exp(\lambda_2 t)$$

- Si p admet 1 racine double λ alors

$$y(t) = c_1 \exp(\lambda t) + c_2 t \exp(\lambda t)$$

Cas d'équations homogènes d'ordre n

Exercice

Quelle est la forme des solutions de l'équation

$$y^{(n)} - y = 0?$$

Existence, unicité, stabilité

1. Équations différentielles ordinaires
   - Exemples et motivations
   - Cas linéaire d'ordre 1 et 2
   - Existence, unicité, stabilité
   - Equation différentielle linéaire dans le plan à coefficient constant
   - Analyse qualitative et stabilité

2. Equations aux dérivées partielles

Existence + unicité de solution

On s'intéresse aux solutions de l'équation différentielle

$$(1) \quad \begin{cases} y'(t) = f(y(t), t), & \forall t \in [a, b] \\ y(t_0) = y_0 \in \mathbb{R}^n, & \text{avec } t_0 \in [a, b] \end{cases}$$

où en règle général, $f : \mathbb{R}^n \times [a, b] \to \mathbb{R}^n$ est supposée continue et localement Lipschitzienne par rapport à la première variable.

Definition (Localement Lipschitzienne)

On dit que $f : \mathbb{R}^n \times [a, b] \to \mathbb{R}^n$ est localement Lipschitzienne par rapport à la première variable, si tout pour $u_0 \in \mathbb{R}^n$, il existe un voisinage U de u_0 et un réel $L > 0$ tels que

$$\|f(u, t) - f(v, t)\| \leq L\|u - v\|, \qquad \forall (u, v) \in U^2.$$

Pour simplifier les choses, on pourra aussi supposer que f est C^1 sur $\mathbb{R}^n \times [a, b]$

Exercice

Exemple avec

$$\begin{cases} y'(t) = \sqrt{|y(t)|}, & \forall t \in \mathbb{R} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

La fonction $f(t,u) = \sqrt{|u|}$ n'est pas lipschitzienne par rapport à u !
Montrer que cette équation admet plusieurs solutions !

Exercice

Exemple avec

$$\begin{cases} y'(t) = y(t)^2, & \forall t \in \mathbb{R} \\ y(0) = y_0 > 0 \end{cases}$$

La fonction f associée est bien continue et localement Lipschitz.
Montrer que ce problème admet pour solution

$$y(t) = \frac{1}{y_0^{-1} + t_0 - t}, \quad \text{pour} \quad t < t_0 + y_0^{-1}.$$

Existence + unicité de solution

Soit

$$(1) \quad \begin{cases} y'(t) = f(y(t), t), & \forall t \in [a, b] \\ y(t_0) = y_0 \in \mathbb{R}^n, & \text{avec } t_0 \in [a, b] \end{cases}$$

Theorem (Cauchy-Lipschitz, version locale)

Hypothèses : *On suppose que* $f : \mathbb{R}^n \times [a, b] \to \mathbb{R}^n$ *est continue, localement Lipschitzienne par rapport à la première variable,*
Alors (1) *admet une unique solution* C^1 *sur* $I_\alpha = [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$.

Bornes sur les solutions

Proposition (Lemme de Gronwall)

Hypothèses: Soit $w \in C([0,T],\mathbb{R})$ une fonction satisfaisant

$$\exists C \in \mathbb{R}, \forall t \in [0,T], w(t) \leq w(0) + C\int_0^t w(s)ds,$$

alors pour tout $t \in [0,T]$,

$$w(t) \leq w(0)\exp(Ct).$$

Preuve : il suffit de remarquer que ψ définie par $\psi(t) = w(0) + C\int_0^t w(s)ds$ est de classe C^1 et vérifie

$$\psi'(t) = Cw(t) \leq C\psi(t).$$

La fonction $t \mapsto \exp(-Ct)\psi(t)$ est donc décroissante.

Élément de preuve de Cauchy-Lipschitz,

La version intégrée en temps de (1)

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(y(s), s)ds,$$

s'écrit sous forme de point fixe :

$$y = \Phi(y), \text{ avec } \Phi(y) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(y(s), s)ds.$$

Avec

$$\|\Phi(y_1) - \Phi(y_2)\|_\infty \leq \int_{t_0}^{t} |f(y_1(s), s) - f(y_2(s), s)|\, ds \leq (t - t_0)L\|y_1 - y_2\|_\infty$$

on en déduit que ce point fixe est contractant pour $t - t_0$ suffisamment petit.
Enfin, le lemme de Gronwall (appliqué à $t \to |y_1(t) - y_2(t)|$) permet d'obtenir le résultat d'unicité.

Croisement de solutions

Proposition (Trajectoire distincte)

Hypothèses: On suppose que f est de classe $C^1(\mathbb{R}^d \times [0, T])$ et soient y_1, y_2 deux solutions de

$$y'(t) = f(y(t), t),$$

pour $t \in [0, T]$. Si $y_1(0) \neq y_2(0)$, alors pour tout $t \in [0, T]$,

$$y_1(t) \neq y_2(t)$$

Élément de preuve

Par l'absurde, supposons qu'il existe un premier temps $t_1 \in [0, T]$ tel que

$$y_1(t_1) = y_2(t_1).$$

Remarquons que les 2 fonctions w_1 et w_2 définies par

$$w_1(t) = y_1(t_1 - t) \text{ et } w_2(t) = y_2(t_1 - t),$$

sont alors solution de la même équation différentielle

$$\begin{cases} w'(t) &= -f(w(t), t_1 - t) \\ w(0) &= y_1(t_1) = y_2(t_1) \end{cases}$$

Le théorème de Cauchy-Lipschitz montre que $w_1 = w_2$ sur un voisinage de t^*. On en déduit l'existence d'un temps $t_2 < t_1$ tel que $y_1(t_2) = y_2(t_2)$...

Equation différentielle linéaire dans le plan à coefficient constant

1. Équations différentielles ordinaires
   - Exemples et motivations
   - Cas linéaire d'ordre 1 et 2
   - Existence, unicité, stabilité
   - Equation différentielle linéaire dans le plan à coefficient constant
   - Analyse qualitative et stabilité
2. Equations aux dérivées partielles

Système d'EDO linéaire dans le plan à coefficient constant

On s'intéresse dans cette section un système 2D :

$$y'(t) = Ay(t), \quad \text{avec } A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ et } y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

Les solutions de ce système sont de la forme

$$y(t) = \exp(tA) \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix},$$

où $\exp(A)$ est l'exponentielle de la matrice A définie par

$$\exp(A) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!}.$$

Exemple de calcul de l'exponentielle de matrice

- Cas d'une matrice A diagonale

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \Longrightarrow exp(tA) = \begin{pmatrix} \exp(t\lambda_1) & 0 \\ 0 & \exp(t\lambda_2) \end{pmatrix},$$

ce qui conduit à des solutions de la forme

$$y(t) = (\alpha_1 \exp(t\lambda_1), \alpha_2 \exp(t\lambda_2))^t.$$

- Cas d'une matrice de rotation A

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow exp(tA) = \begin{pmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ -sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix},$$

ce qui conduit à des solutions de la forme

$$y(t) = (\alpha_1 cos(t) + \alpha_2 sin(t), \alpha_1 cos(t) - \alpha_2 sin(t))^t.$$

Solutions explicites 1

Premier cas : matrice diagonalisable dans $\mathbb{R}$ *:*
Si A admet des valeurs propres λ_1, λ_2 associées aux vecteurs propres e_1 et e_2,

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \quad \text{avec } P = [e_1, e_2],$$

alors

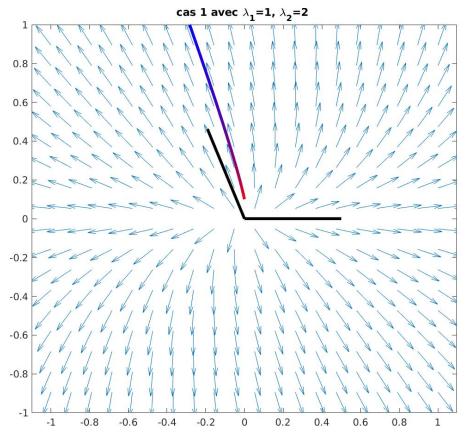
$$P^{-1}\exp(tA)P = \begin{pmatrix} \exp(\lambda_1 t) & 0 \\ 0 & \exp(\lambda_2 t) \end{pmatrix}$$

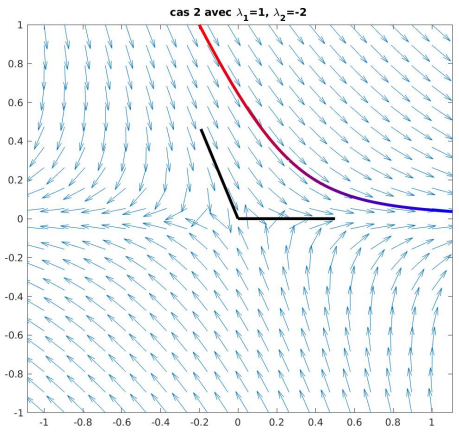
et les solutions sont de la forme

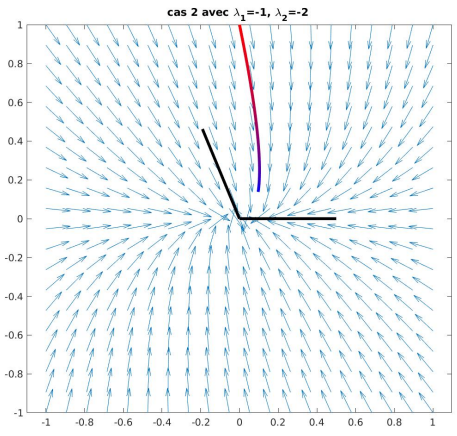
$$y(t) = \alpha_1 \exp(\lambda_1 t)e_1 + \alpha_2 \exp(\lambda_2 t)e_2$$

Solutions explicites 1

- Cas $\lambda_1 > 0$ et $\lambda_2 > 0$: nœud instable
- Cas $\lambda_1 > 0 > \lambda_2$: point-selle
- Cas $\lambda_1 < 0$ et $\lambda_2 < 0$: nœud stable







Solutions explicites 2

Deuxième cas : Valeurs propres réelles mais non diagonalisable :
Dans ce cas, la valeur propre est nécessairement unique, λ et d'après le théorème de Jordan, la matrice se décompose sous la forme

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Alors

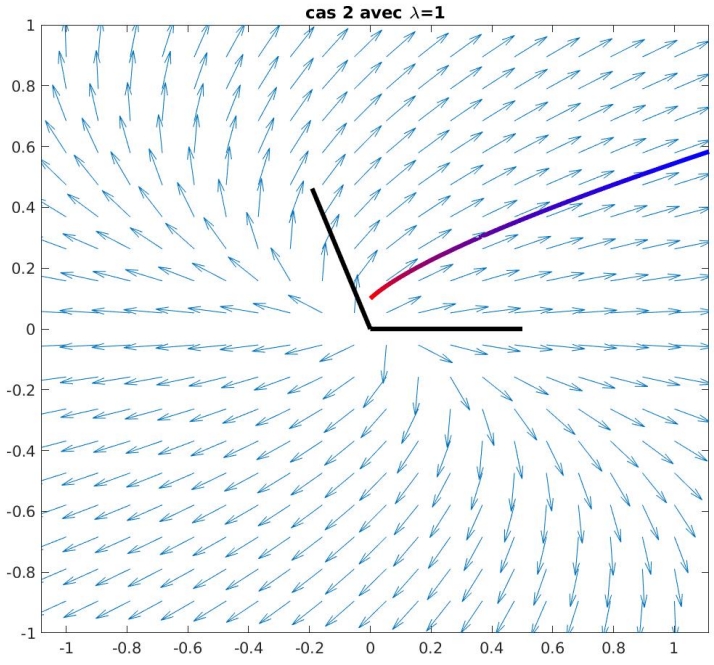
$$P^{-1}\exp(tA)P = \begin{pmatrix} \exp(\lambda t) & t\exp(\lambda t) \\ 0 & \exp(\lambda t) \end{pmatrix}$$

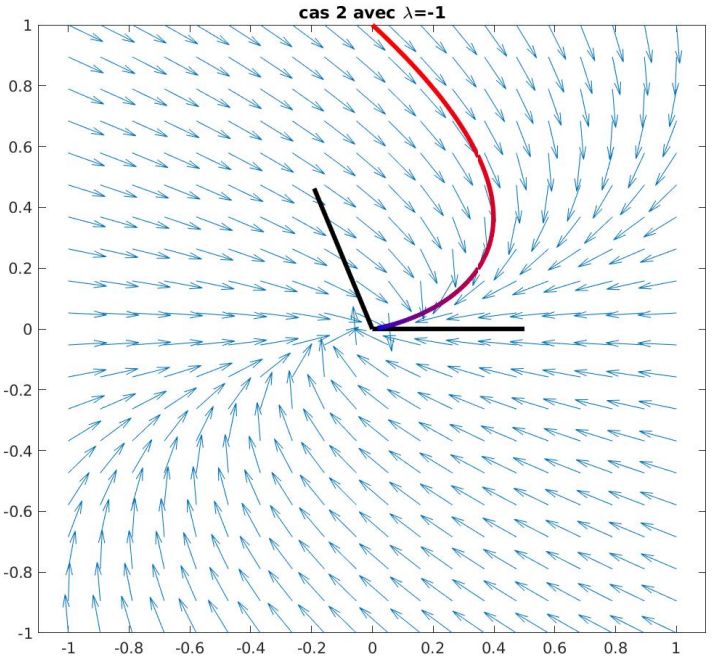
et les solutions sont de la forme

$$y(t) = (\alpha_1 + \alpha_2 t)\exp(\lambda t)e_1 + \alpha_2 \exp(\lambda t)e_2$$

Solutions explicites 2

- Cas $\lambda_1 = \lambda_2 > 0$: nœud dégénéré instable
- Cas $\lambda_1 = \lambda_2 < 0$: nœud dégénéré stable





Solutions explicites 3

Troisième cas : cas de valeurs propres complexes :
Dans ce cas, les valeurs propres sont complexes conjuguées

$$\lambda_{\pm} = a \pm ib,$$

et la matrice se décompose sous la forme

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} = \rho R_{\theta},$$

où

$$\rho e^{i\theta} = a + ib \quad \text{et} \quad R_{\theta} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & sin(\theta) \\ -sin(\theta) & cos(\theta) \end{pmatrix}$$

Alors

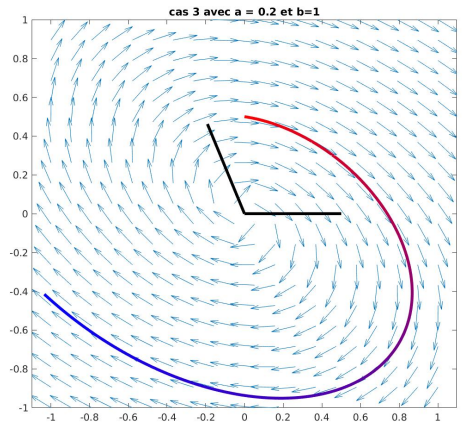
$$P^{-1}\exp(tA)P = \exp(ta)\begin{pmatrix} \cos(bt) & sin(bt) \\ -sin(bt) & cos(bt) \end{pmatrix}.$$

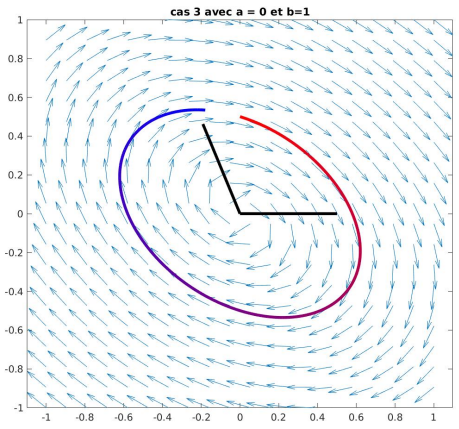
et les solutions s'expriment sous la forme

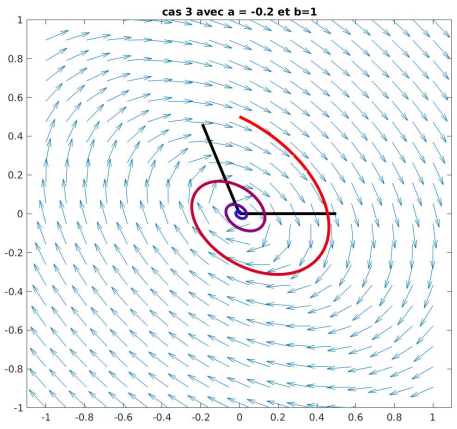
$$y(t) = \exp(at)\left[(\alpha_1 cos(bt) + \alpha_2 sin(bt))e_1 + (\alpha_1 sin(bt) - \alpha_2 cos(bt))e_2\right]$$

Solutions explicites 2

- Cas $\lambda_\pm = a \pm ib$ avec $a > 0$: foyer instable
- Cas $\lambda_\pm = a \pm ib$ avec $a = 0$: centre
- Cas $\lambda_\pm = a \pm ib$ avec $a < 0$: foyer stable







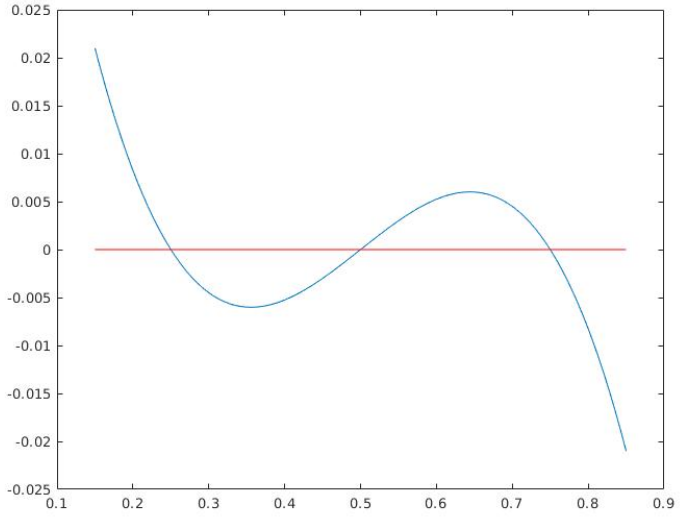
Analyse qualitative et stabilité

1. Équations différentielles ordinaires
   - Exemples et motivations
   - Cas linéaire d'ordre 1 et 2
   - Existence, unicité, stabilité
   - Equation différentielle linéaire dans le plan à coefficient constant
   - Analyse qualitative et stabilité

2. Equations aux dérivées partielles

Exemple 1: cas 1D

On suppose que y vérifie l'équation $y'(t) = f(y)$ où f est de la forme



- Points d'équilibre de l'équation ?
- Comportement asymptotique autour d'un point d'équilibre y_k:

$$x'(t) = (y(t) - y_k)' \simeq f'(y_k)(y(t) - y_k) = f'(y_k)x(t),$$

et $x(t) \simeq x(0)exp(f'(y_k)t)$.

- Un point stationnaire y_k est attractif si $f'(y_k) < 0$.

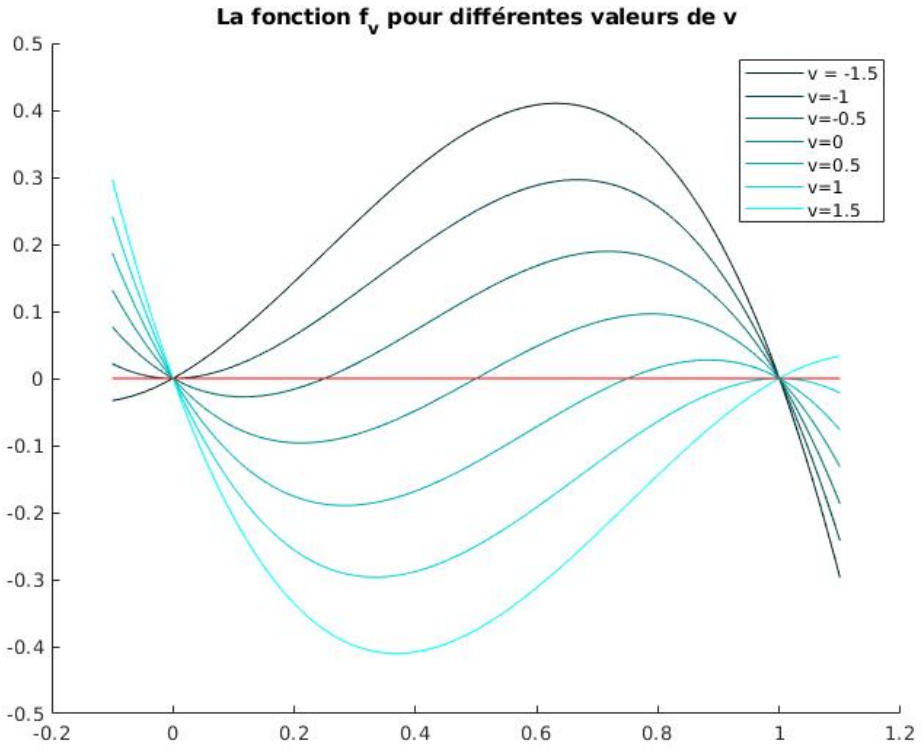
Exemple 2: système couplé avec une variable lente

On s'intéresse à un système de la forme

$$\begin{cases} u'(t) &= f_v(u) = -u(1-u)(1-2u) - v\,u(1-u) \\ v'(t) &= \varepsilon(u - 1/2) \end{cases}$$

avec $\varepsilon << 1$.

- Points d'équilibre de f_v en fonction de v ?

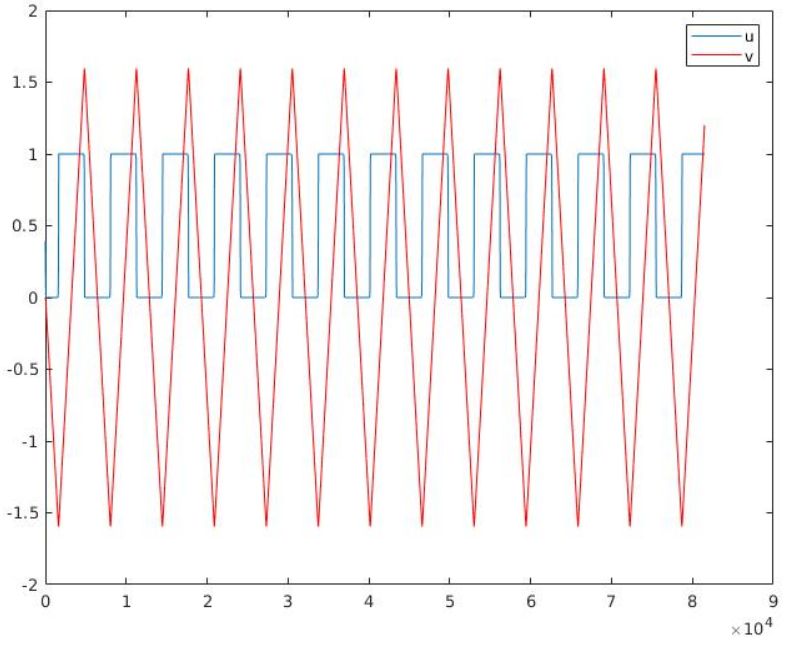


Exemple 2: système couplé avec une variable lente

- Points d'équilibre de f_v en fonction de v ?
  - si $v = -1.5$ alors 0 instable et 1 stable
  - si $v = 0$ alors 0 et 1 stable, $1/2$ instable
  - si $v = +1.5$ alors 0 stable et 1 instable
- Comportement du système ?

$$u'(t) = f_v(u) \text{ et } v'(t) = \varepsilon(u - 1/2).$$

On observe une évolution périodique ...



Système d'EDO autonome

On considère maintenant un système d'EDO autonome :

$$y'(t) = f(y(t)),$$

où $f : \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{R}^d$ et telle qu'il existe une solution pour $t > 0$.

On dit de plus que y_e est un point d'équilibre si

$$f(y_e) = 0.$$

Notion de stabilité

Definition

Un point d'équilibre y_e est :

- Stable si

$$\forall \delta > 0, \exists \delta > 0, \quad \{\|y(0) - y_e\| < \eta\} \Longrightarrow \{\forall t > 0, \|y(t) - y_e\| < \delta\}$$

- Attractif si

$$\exists \eta > 0, \quad \{\|y(0) - y_e\| < \eta\} \Longrightarrow \{\lim_{t \to \infty} y(t) = y_e\}$$

- Asymptotiquement stable s'il est stable et attractif
- Instable s'il n'est pas stable

Stabilité et cas d'un système linéaire

Theorem

Dans le cas d'un système linéaire

$$y'(t) = Ay(t),$$

où A est une matrice de taille d. Alors, $y_e = 0$ *est un point d'équilibre et*

- *Le point* $y_e = 0$ *est asymptotiquement stable si toutes les valeurs propres de A sont de partie réelle strictement négative*
- *Le point* $y_e = 0$ *est instable dès qu'une valeur propre de A a une partie réelle strictement positive.*

Cas général et linéarisation

On considère maintenant un système d'EDO autonome

$$y'(t) = f(y(t)),$$

et y_e un point stationnaire avec $f(y_e) = 0$.

L'étude de la stabilité du point fixe y_e peut s'effectuer en linéarisant l'équation au voisinage de y_e.
En remarquant que

$$x(t) = y(t) - y_e,$$

on vérifie que

$$\begin{aligned} x'(t) = y'(t) &= f(y(t)) - f(y_e(t)) \\ &\simeq Df(y_e)(y(t) - y_e) = Df(y_e)(x(t)) \end{aligned}$$

Stabilité, cas général

Theorem

On considère un système

$$y'(t) = f(y(t)),$$

où f est une fonction de classe C^1 telle que $f(y_e) = 0$.

Alors y_e est un point d'équilibre et on note $A = Df(y_e)$ la matrice Jacobienne de f en y_e. De plus

- *Le point y_e est asymptotiquement stable si toutes les valeurs propres de A sont de partie réelle strictement négative*
- *Le point y_e est instable dès qu'une valeur propre de A a une partie réelle strictement positive.*

Cas du système de Volterra-Lotka

Exercice

On s'intéresse au système de Volterra-Lotka

$$\begin{cases} y_1'(t) &= y_1(t)(a - by_2(t)) \\ y_2'(t) &= y_2(t)(-c + dy_1(t)) \end{cases}$$

- Trouver les points d'équilibre de ce système
- Étudier la stabilité de ce système en

$$y_e = (c/d, a/b).$$

Cas de l'équation du pendule

Exercice

On s'intéresse aux points d'équilibre pour le problème du pendule simple

$$\theta''(t) = -\sin(\theta)$$

- Étudier la stabilité des points d'équilibre pour le problème du pendule simple
- Peut t'on conclure dans tous les cas ?

Stabilité et fermé invariant

Definition

On dit qu'un sous-ensemble fermé de E de $\mathbb{R}^d$ est invariant pour le système différentiel $y'(t) = f(y)$ si

$$\{y(0) \in E\} \Longrightarrow \{\forall t > 0, y(t) \in E\}.$$

Proposition

Soit E n sous-ensemble fermé de $\mathbb{R}^d$ possédant une normal sortante $n(x)$ pour presque toute élément x de sa frontière ∂E. Si

$$f(x) \cdot n(x) \leq 0, \quad \forall x \in \partial E,$$

alors E est invariant

Cas du système de Volterra-Lotka

Exercice

On s'intéresse au système de Volterra-Lotka

$$\begin{cases} y_1'(t) &= y_1(t)(a - by_2(t)) \\ y_2'(t) &= y_2(t)(-c + dy_1(t)) \end{cases}$$

- Montrer que la fonction L définie par

$$L(t) = -a\, ln(y_2(t)) + b\, y_2(t) - c\, ln(y_1(t)) + d\, y_1(t), \quad t > 0$$

est constante

- En déduire que les ensembles

$$E_C = \{x \in \mathbb{R}^2; -a\, ln(x_2) + b\, x_2 - c\, ln(x_1) + d\, x_1 \leq C\},$$

sont invariants.

Equations aux dérivées partielles

1. Équations différentielles ordinaires

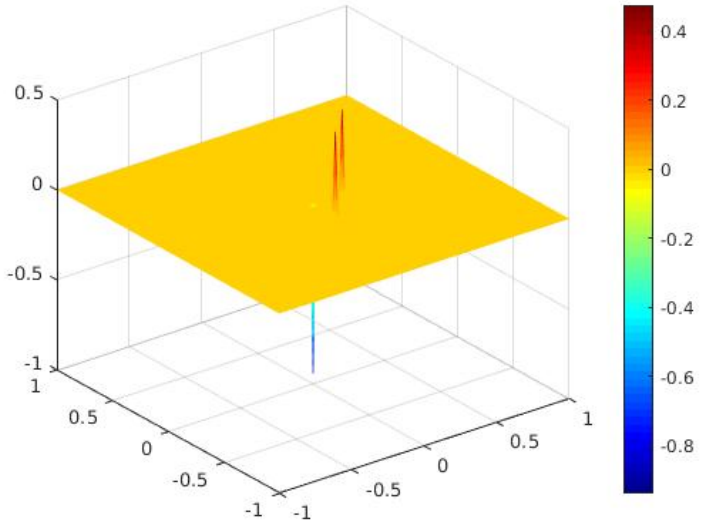
2. Equations aux dérivées partielles
   - Exemples d'EDP et motivations
   - Opérateurs différentiels et propriétés
   - Intégrales de surfaces et formule de Green
   - EDP et Modélisation
   - Exemples de résolution dans $\mathbb{R}^d$
   - Exemples de résolution dans ensemble borné Ω

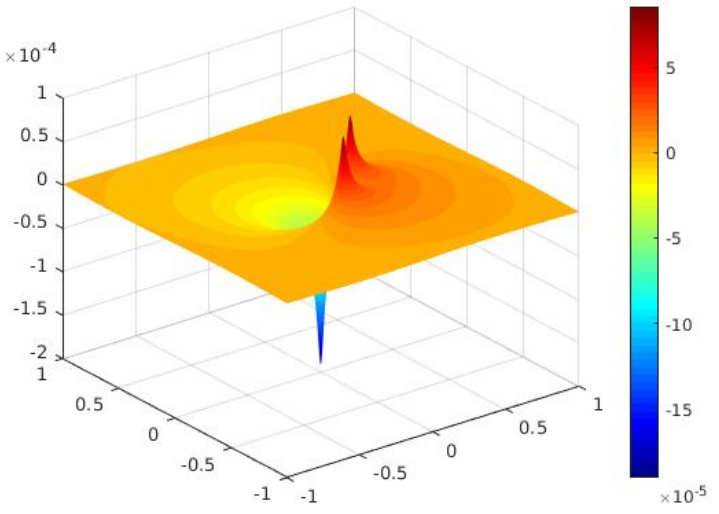
Equation de Laplace : Equation Elliptique

- Equation stationnaire

$$\begin{cases} -\Delta u(x) & = f(x), \text{ pour } x \in \Omega \subset \mathbb{R}^d \\ u(x) & = g(x), \text{ pour } x \in \partial\Omega \end{cases}$$

- Solution ? Propriétés qualitatives des solutions ?



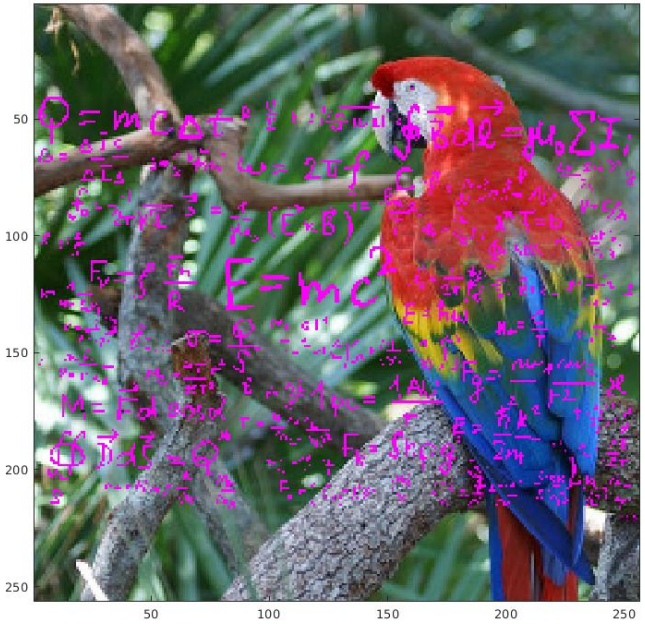


Equation de Laplace : Application à l'inpainting

- Image I originale altérée dans Ω et intacte dans $\mathbb{R}^d \setminus \Omega$.
- Image restaurée u avec

$$\begin{cases} \Delta u(x) & = 0 \text{ pour } x \in \Omega \\ u(x) & = I(x) \text{ pour } x \in \mathbb{R}^d \setminus \Omega \end{cases}$$

- Exemple de reconstruction (Projet Clanu 2016)

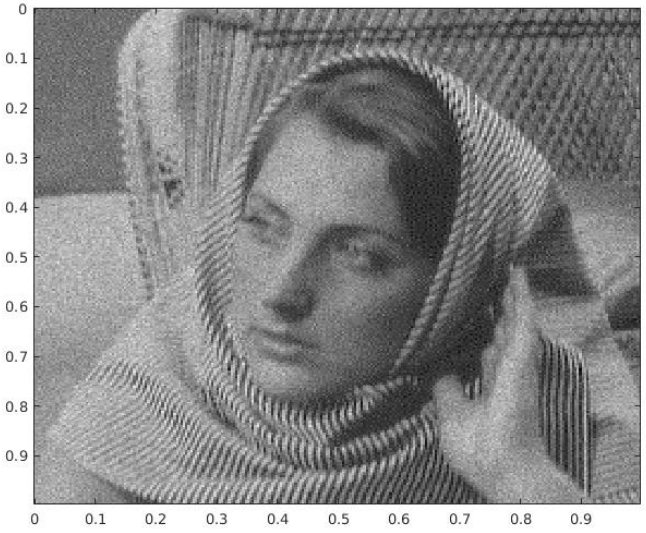


Equation de la chaleur : Equation Parabolique

- Equation d'évolution

$$\begin{cases} \partial_t u(x,t) - \Delta u(x,t) & = f(x), \text{ pour } (x,t) \in \Omega \times [0,T] \\ u(x,0) & = u_0(x), \text{ pour } x \in \Omega \\ u(x,t) & = g(x), \text{ pour } (x,t) \in \partial\Omega \times [0,T] \end{cases}$$

- Application: Débruitage d'image

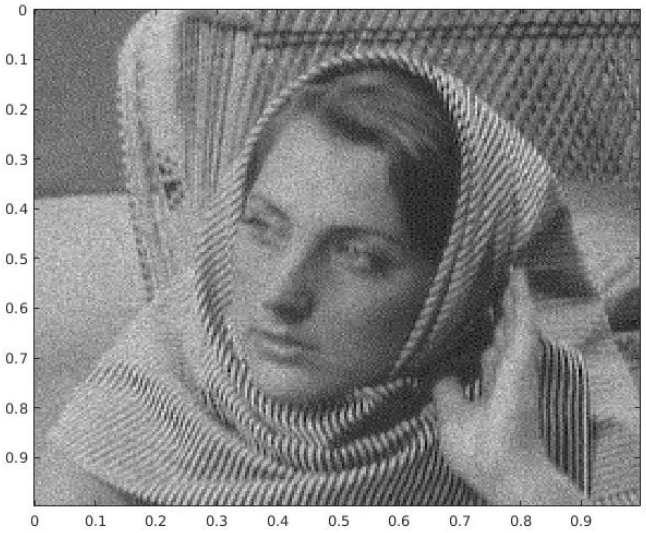


Equation des ondes : Equation hyperbolique

- Equation d'évolution

$$\begin{cases} \partial^2_{tt} u(x,t) - \Delta u(x,t) & = f(x), \text{ pour } (x,t) \in \Omega \times [0,T] \\ u(x,0) & = u_0(x), \text{ pour } x \in \Omega \\ \partial_t u(x,0) & = u_1(x), \text{ pour } x \in \Omega \\ u(x,t) & = g(x), \text{ pour } (x,t) \in \partial\Omega \times [0,T] \end{cases}$$

- Application : Imagerie photo-acoustique



Exemple d'équation non linéaire

- L'équation de Navier Stokes

$$\begin{cases} \rho(\partial_t v + v.\nabla v) & = -\nabla p + \mu \Delta v \\ \text{div}(v) & = 0 \end{cases}$$

- Problème : Existence ?

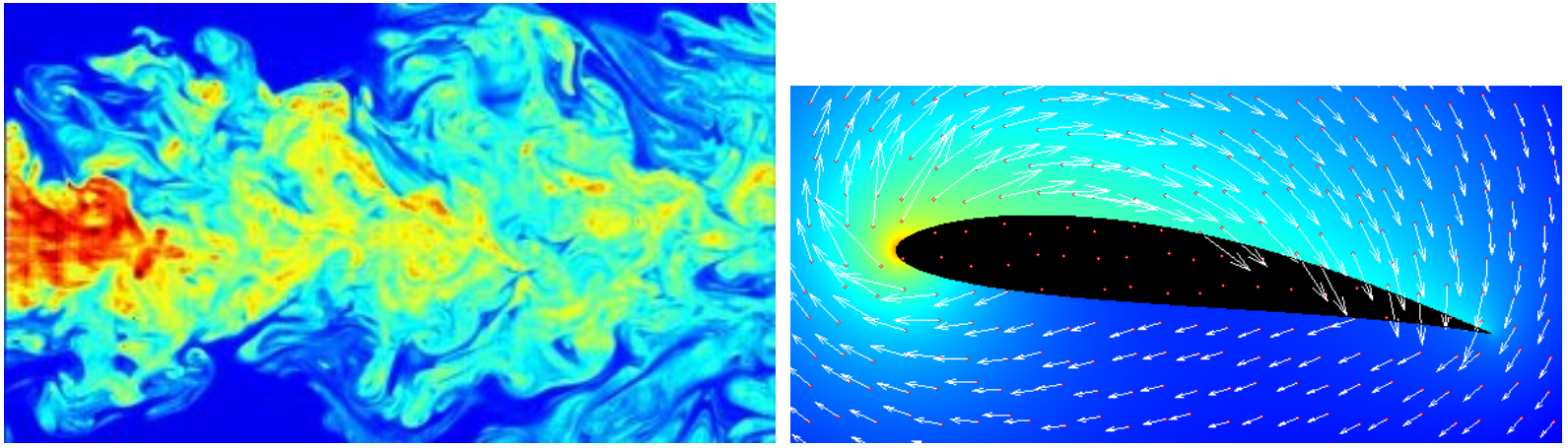


Figure: Science étonnante : La mystérieuse équation de Navier-Stokes

Opérateurs différentiels et propriétés

1. Équations différentielles ordinaires

2. Equations aux dérivées partielles
   - Exemples d'EDP et motivations
   - Opérateurs différentiels et propriétés
   - Intégrales de surfaces et formule de Green
   - EDP et Modélisation
   - Exemples de résolution dans $\mathbb{R}^d$
   - Exemples de résolution dans ensemble borné Ω

Dérivées partielles et opérateurs différentiels

- Soit $f : \Omega \subset \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{R}$ un champ scalaire
- Les dérivées partielles de f sont définies par

$$\partial_{x_i} f(x) = lim_{h \to 0} \frac{f(x + he_i) - f(x)}{h},$$

  avec $\{e_i\}_{i=1,2,3}$ représente la base canonique de $\mathbb{R}^3$
- Le gradient de f est alors défini par

$$\text{grad}(f)(x) = \nabla f(x) = \begin{pmatrix} \partial_{x_1} f(x) \\ \partial_{x_2} f(x) \\ \partial_{x_3} f(x) \end{pmatrix}$$

- Le laplacien de f est définie par

$$\Delta f = (\partial^2_{x_1^2} + \partial^2_{x_2^2} + \partial^3_{x_2^2})(f)$$

Exercice

Déterminer le gradient f définie par $f(x) = \log(r)$ avec $r = \|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$.

Dérivées partielles et opérateurs différentiels

- Soit $g : \Omega \subset \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{R}^d$ un champ vectoriel

$$g(x) = g(x) = \begin{pmatrix} g_1(x) \\ g_2(x) \\ g_3(x) \end{pmatrix}$$

- La divergence de g est définie par

$$\text{div}(g(x)) = \nabla \cdot g(x) = \partial_{x_1} g_1(x) + \partial_{x_2} g_2(x) + \partial_{x_3} g_3(x)$$

- La rotationnel de g est défini par

$$\text{rot}(g(x)) = \nabla \wedge g(x) = \begin{pmatrix} \partial_{x_2} g_3(x) - \partial_{x_3} g_2(x) \\ \partial_{x_3} g_1(x) - \partial_{x_1} g_3(x) \\ \partial_{x_1} g_2(x) - \partial_{x_2} g_1(x) \end{pmatrix}$$

- Le laplacien de g est définie par

$$\Delta g = \begin{pmatrix} \Delta g_1(x) \\ \Delta g_2(x) \\ \Delta g_3(x) \end{pmatrix}$$

Quelques propriétés des opérateurs différentiels

Proposition

Soit $f : C^2(\Omega, \mathbb{R})$ et $g : C^2(\Omega, \mathbb{R}^d)$, alors

- $\text{rot}(\nabla f) = 0$
- $\text{div}(\text{rot}(g)) = 0$
- $\text{div}(\nabla f) = \Delta f$
- $\text{rot}(\text{rot}(g)) = \nabla \text{div}(g) - \Delta g$
- $\text{div}(fg) = f\text{div}(g) + \nabla f \cdot g$
- $\text{rot}(fg) = f\text{rot}(g) + \nabla f \wedge g$

Exercice

Déterminer pour $x \neq 0$, la divergence du champ vectoriel g définie par $g(x) = \frac{x}{|r|^2}$ avec $r = \|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$.

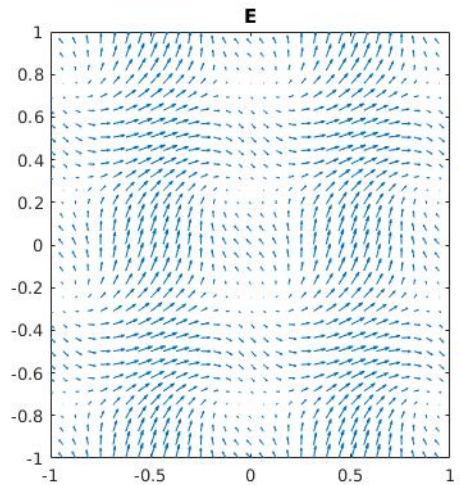
Décomposition de Helmholtz-Hodge

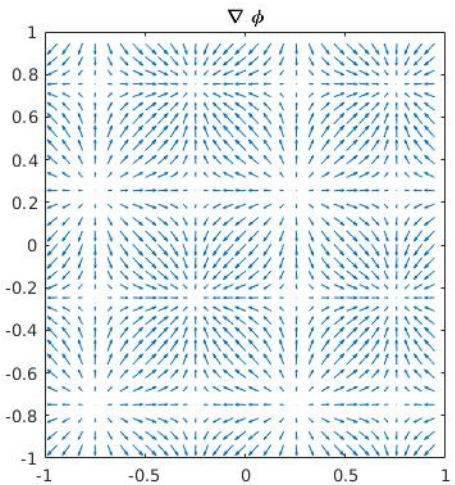
Proposition

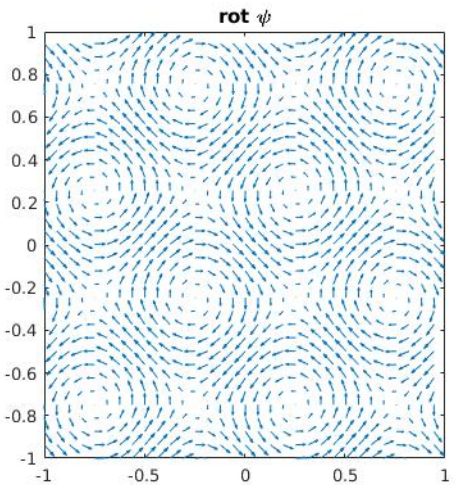
Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ un domaine convexe et soit E un champs vectoriel C^1 sur Ω. Alors il existe un champ vectoriel ψ et un champs scalaire φ tels que

$$E = \text{rot}(\psi) + \nabla\varphi.$$

- Si de plus $\text{rot}(E) = 0$, alors $E = \nabla\varphi$.
- Si de plus $\text{div}(E) = 0$, alors $E = \text{rot}(\psi)$.







Existence, unicité, stabilité

1. Équations différentielles ordinaires

2. Equations aux dérivées partielles
   - Exemples d'EDP et motivations
   - Opérateurs différentiels et propriétés
   - Intégrales de surfaces et formule de Green
   - EDP et Modélisation
   - Exemples de résolution dans $\mathbb{R}^d$
   - Exemples de résolution dans ensemble borné Ω

Courbe $\mathcal{C}$ dans $\mathbb{R}^3$ et représentation paramétrique

- Représensation paramétrique:

$$\mathcal{C} = \{\alpha(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t)) \in \mathbb{R}^3; t \in [a, b]\},$$

où $\alpha : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ est supposée continue.

- Exemple: Le cercle centré en 0 dans le plan $z = 0$ et de rayon R peut être décrit par la paramétrisation

$$\alpha(t) = (R\cos(t), R\sin(t), 0)$$

pour $t \in [0, 2\pi]$.

Intégrale curviligne

Soit $\mathcal{C}$ une courbe et $\alpha : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ continue telle que

$$\mathcal{C} = \{\alpha(t) \in \mathbb{R}^3; t \in [a, b]\},$$

- Intégrale d'un champ scalaire sur $\mathcal{C}$:
  Soit $f : \mathcal{C} \to \mathbb{R}$, un champ scalaire alors

$$\int_{\mathcal{C}} f \, ds = \int_a^b f(\alpha(s))\|\alpha'(s)\| ds.$$

- Circulation d'un champ vectoriel sur $\mathcal{C}$:
  Soit $g : \mathcal{C} \to \mathbb{R}^3$, un champ vectoriel alors

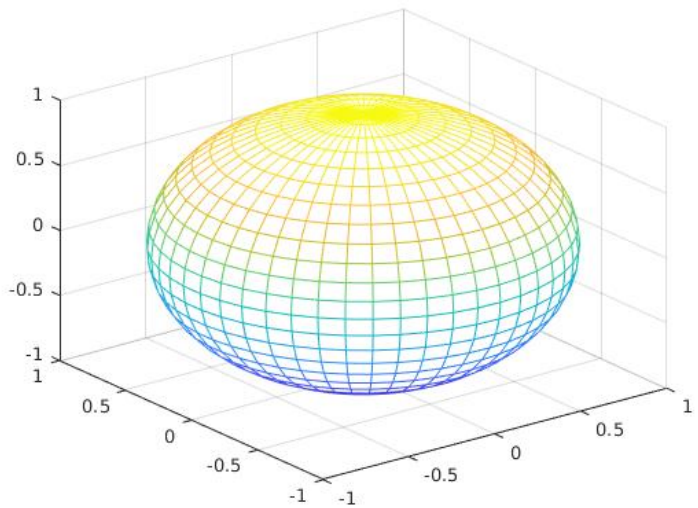
$$\int_{\mathcal{C}} g \cdot d\ell = \int_a^b g(\alpha(s)) \cdot \alpha'(s) ds.$$

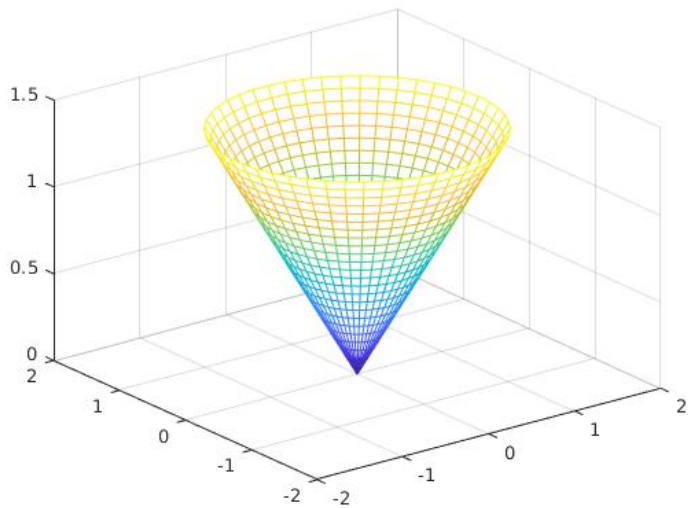
Représentation paramétrique d'une surface

Une surface Σ est un ensemble de points de $\mathbb{R}^3$, dont les coordonnées $x = (x_1, x_2, x_3)$ sont des fonctions continues de deux paramètres (s, t).

Elle peut alors être définie à l'aide d'un champs vectoriel $\alpha : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie sur un ouvert connexe U de $\mathbb{R}^3$ tel que

$$\Sigma = \{x = \alpha(s, t) \in \mathbb{R}^3; (s, t) \in U\}.$$





Exemple (La sphère centrée à l'origine et de rayon R)

Cette surface peut être décrite par la représentation paramétrique

$$\begin{cases} x_1 = R\cos(s)\cos(t) \\ x_2 = R\cos(s)\sin(t) \\ x_3 = R\sin(s) \end{cases},$$

pour tout $(s,t) \in [0, 2\pi] \times [-\pi/2, \pi/2]$

Exemple (Le cône de hauteur $H\cos(\gamma)$)

Cette surface peut être décrite par

$$\begin{cases} x_1 = \sin(\gamma)\cos(s)t \\ x_2 = \sin(\gamma)\sin(s)t \\ x_3 = \cos(\gamma)t \end{cases},$$

pour tout $(s,t) \in [0, 2\pi] \times [0, H]$

Plan tangent et normale à la surface Σ

On suppose maintenant que le champ de vecteurs α est de classe C^1 sur U :

Definition (Point régulier)

On dit qu'un point $x = \alpha(s_0, t_0)$ de la surface paramétrée Σ est régulier si en ce point

$$\frac{\partial \alpha}{\partial s} \wedge \frac{\partial \alpha}{\partial t} \neq 0.$$

Dans le cas contraire, on parle de point singulier.

Definition (Plan tangent et normale à la surface)

En un point régulier $x = \alpha(s_0, t_0)$, le plan affine contenant le point $M = \alpha(s_0, t_0)$ et les deux directions $\frac{\partial \alpha}{\partial s}(s_0, t_0)$ et $\frac{\partial \alpha}{\partial t}(s_0, t_0)$ est appelé plan tangent. En ce point, la droite orthogonale à ce plan est dirigée par le vecteur

$$N = \frac{\partial \alpha}{\partial s} \wedge \frac{\partial \alpha}{\partial t}.$$

Aire d'une surface paramétrique

On considère une surface Σ paramétrée par (α, U).

Definition (Aire de Σ)

L'aire de Σ notée $|\Sigma|$, est définie par l'intégrale

$$\int_{\Sigma} 1 dx = \int_{U} \left\| \frac{\partial \alpha}{\partial s} \wedge \frac{\partial \alpha}{\partial t} \right\| dsdt$$

Exercice

Calculer l'aire d'un cône de hauteur $Hcos(\gamma)$?

Intégrales de surface

On considère une surface $\Sigma = \alpha(U)$ une surface paramétrique décrite par une fonction différentiable α définie sur un ouvert U et soit f un champ scalaire défini et intégrale sur Σ

Definition (Intégrale de surface)

L'intégrale de surface de f sur Σ est définie par

$$\int_{\Sigma} f(x)dS(x) = \int_{U} f(\alpha(s,t)) \left\| \frac{\partial \alpha}{\partial s} \wedge \frac{\partial \alpha}{\partial t} \right\| dsdt$$

Exercice

Calculer l'intégrale du champs scalaire $f(x) = x_3$ sur un cône de hauteur $Hcos(\gamma)$?

Flux de champ à travers une surface

On considère une surface $\Sigma = \alpha(U)$ et soit g un champ vectoriel défini sur Σ.
En chaque point régulier de Σ, une normale unitaire à Σ peut être définie

$$\mathbf{n} = \frac{N}{\|N\|} \text{ où } N = \frac{\partial \alpha}{\partial s} \wedge \frac{\partial \alpha}{\partial t}$$

Definition (Flux à travers une surface)

Le flux du champs g à travers la surface Σ est défini par

$$\int_{\Sigma} g(x) \cdot \mathbf{n}(x) dS(x) = \int_{U} g(\alpha(s,t)) \cdot \frac{\partial \alpha}{\partial s} \wedge \frac{\partial \alpha}{\partial t} dsdt$$

Formules de Gauss-Green

Proposition

Soit Ω un domaine régulier de $\mathbb{R}^d$ et soit g un champ vectoriel C^1. Alors

$$\int_\Omega \mathrm{div}(g(x))dx = \int_{\partial\Omega} g(x)\cdot \mathbf{n}(x)d\sigma(x),$$

où $\mathbf{n}$ est la normal extérieur

Proposition

Soit Σ une surfaces régulière de $\mathbb{R}^3$ et soit g un champ vectoriel C^1. Alors

$$\int_\Sigma \mathrm{rot}(g(x))\cdot \mathbf{n}(x)dS(x) = \int_{\partial\Sigma} g(x)\cdot d\ell(x).$$

Intégration par partie

Soient (f, g) deux champs scalaires supposés suffisamment réguliers. Alors

- En dimension 1

$$\int_a^b f(x)g''(x)dx = \left[f(x)g'(x)\right]_a^b - \int_a^b f'(x)g'(x)dx.$$

- En dimension $d \geq 2$

$$\int_\Omega f(x)\Delta g(x)dx = \int_{\partial\Omega} f(x)\nabla g(x)\cdot \mathbf{n}(x)dS(x) - \int_\Omega \nabla f(x)\cdot\nabla g(x)dx.$$

Existence, unicité, stabilité

1. Équations différentielles ordinaires

2. Equations aux dérivées partielles
   - Exemples d'EDP et motivations
   - Opérateurs différentiels et propriétés
   - Intégrales de surfaces et formule de Green
   - EDP et Modélisation
   - Exemples de résolution dans $\mathbb{R}^d$
   - Exemples de résolution dans ensemble borné Ω

Modélisation: Equation de Poisson

- Champ electrique
$$E : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$
- Densité de charges
$$\rho : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$$
- Loi de Maxwell-Gauss
$$div(E) = \frac{1}{\epsilon_0}\rho,$$
où ϵ_0 est la permitivité du vide
- Cas stationnaire : $rot(E) = 0 \Longrightarrow$ existence d'un champ scalaire $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, appelé potentiel de E tel que
$$E = -\nabla\phi$$
- Equation de Poisson:
$$-\Delta\phi = \frac{1}{\epsilon_0}\rho.$$

Modélisation: Equation de la chaleur

- Champ de température: $T : (\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^+) \to \mathbb{R}$
- Flux thermique $q : (\mathbb{R}^3, [0, T]) \to \mathbb{R}^3$ défini par

$$q = -\kappa \nabla T,$$

où κ est la conductivité thermique

- Energie thermique $e : (\mathbb{R}^3, [0, T]) \to \mathbb{R}$ définie par

$$e = cT,$$

où c est la capacité thermique.

Modélisation: Equation de la chaleur

- Energie thermique dans un volume V:

$$E(t) = \int_V e(x,t)dx.$$

- Loi de conservation

$$E'(t) = -\int_{\partial V} q \cdot \mathbf{n}\, dS(x)$$

- On en déduit que pour tout V,

$$\int_V \partial_t[cT(x,t)]dx = E'(t) = \int_V div(\kappa \nabla T)dx.$$

Dans le cas où k et c sont homogènes, on en déduit que le champ de température T vérifie l'équation de la chaleur

$$\partial_t T = \frac{1}{c} div(\kappa \nabla T) = \frac{\kappa}{c} \Delta T$$

Equation de la chaleur, point de vue variationelle

- Energie de variation thermique

$$J(T) = \int_\Omega \frac{1}{2} |\nabla T|^2 dx$$

- Dérivée directionelle de J :

$$J'(T)(\delta_T) = \int_\Omega \nabla T \cdot \nabla \delta_T = \int_\Omega \nabla T \cdot \nabla \delta_T dx.$$

- Gradient de J :

$$J'(T)(\delta_T) = -\int_\Omega \Delta T \delta_T dx \Longrightarrow \nabla J(T) = -\Delta T.$$

- Equation de la chaleur comme un flot de gradient de J

$$\partial_t T = -\nabla J(t) = \Delta T$$

Modélisation : équation des ondes

- Champs electrique E et magnétique B
- Equation de Maxwell

$$\begin{cases} \partial_t B &= -rot(E) \\ \partial_t E &= \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0} rot(B), \end{cases}$$

où μ_0 est la perméabilité magnétique du vide

- Equation vérifiée par E :

$$\partial_{tt}^2 E = \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0} rot(\partial_t B) = -\frac{1}{\epsilon_0 \mu_0} rot(rot(E)).$$

- Dans le vide, la densité de charge $q = 0$ et $div(E) = 0$. On en déduit que

$$rot(rot(E)) = \nabla div(E) - \Delta E = -\Delta E,$$

et

$$\partial_{tt}^2 E = c^2 \Delta E,$$

où $c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$ est la vitesse de la lumière.

1. Équations différentielles ordinaires

2. Equations aux dérivées partielles
   - Exemples d'EDP et motivations
   - Opérateurs différentiels et propriétés
   - Intégrales de surfaces et formule de Green
   - EDP et Modélisation
   - Exemples de résolution dans $\mathbb{R}^d$
   - Exemples de résolution dans ensemble borné Ω

Equation de Poisson et de Laplace

- Equation de Poisson

$$\Delta\phi(x) = f(x), \text{pour tout } x \in \mathbb{R}^d,$$

où f est un champ scalaire $\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, 2 fois continûment dérivable et à support borné.

- Equation de Laplace

$$\Delta\phi(x) = 0, \text{pour tout } x \in \mathbb{R}^d,$$

Exemple de solution de l'équation de Laplace dans $\mathbb{R}^2$

- Equation de Laplace

$$\Delta\phi(x) = 0,$$

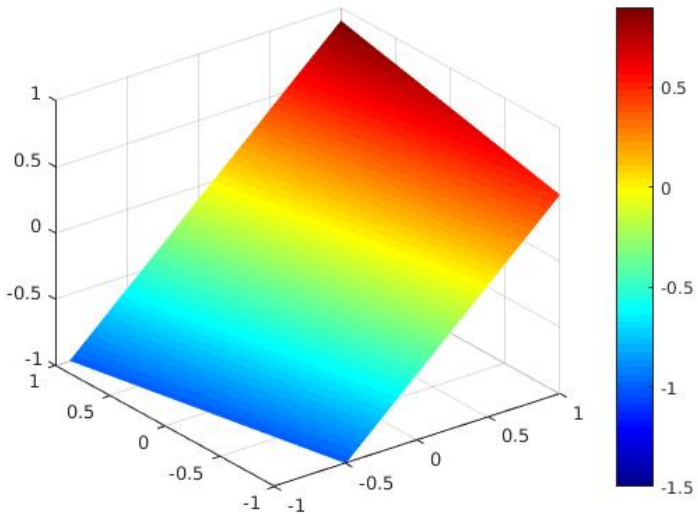
- Solutions polynomiales

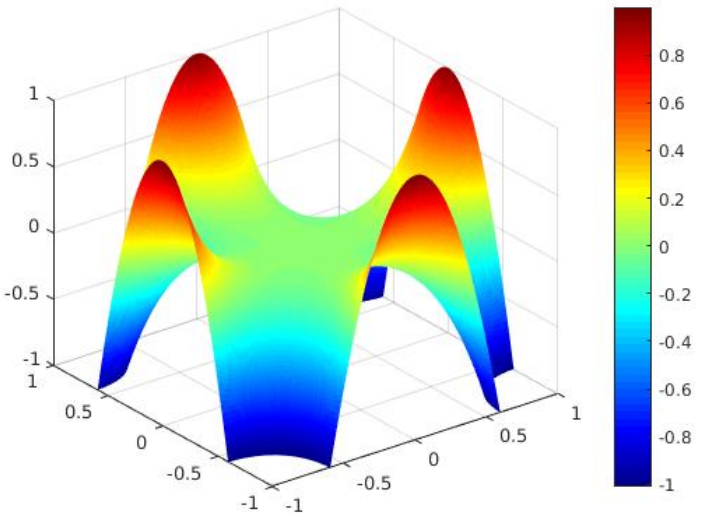
$$\phi(x) = a_1 x_1 + a_2 x_2 + b$$

- Autres solutions, en coordonnées polaires :

$$\phi(x) = r^n cos(n\theta) \quad \text{et } \phi(x) = r^n sin(n\theta),$$

avec $x = (x_1, x_2) = r(cos(\theta), sin(\theta))$ et $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$





Potentiel de Newton

- Equation de Poisson

$$\Delta\phi(x) = f(x), \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}^d,$$

- Le potentiel de Newton:
  Solution particulière (bornée à l'infini) de l'équation de Poisson avec comme second membre $f = \delta$.

$$N(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} log(\|x\|) & \text{si } d = 2 \\ \frac{1}{(2-d)|B_d|} \|x\|^{2-d} & \text{si } d \geq 3, \end{cases}$$

où $B_d = \{x \in \mathbb{R}^d; \|x\| \leq 1\}$

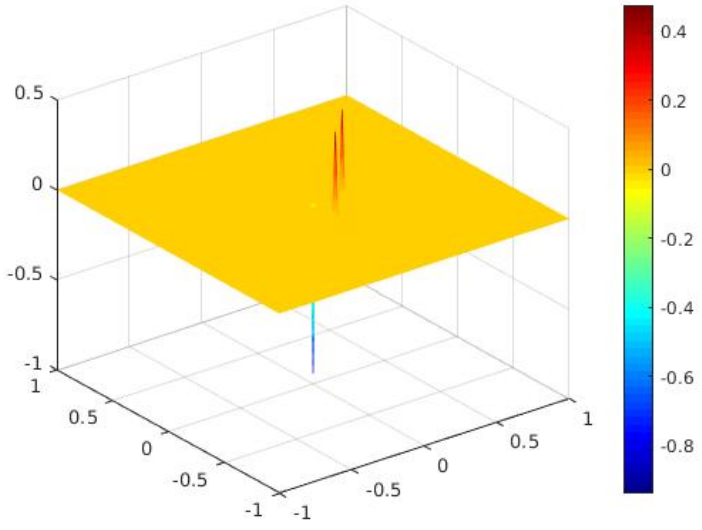
Résolution de l'équation de Poisson dans $\mathbb{R}^d$

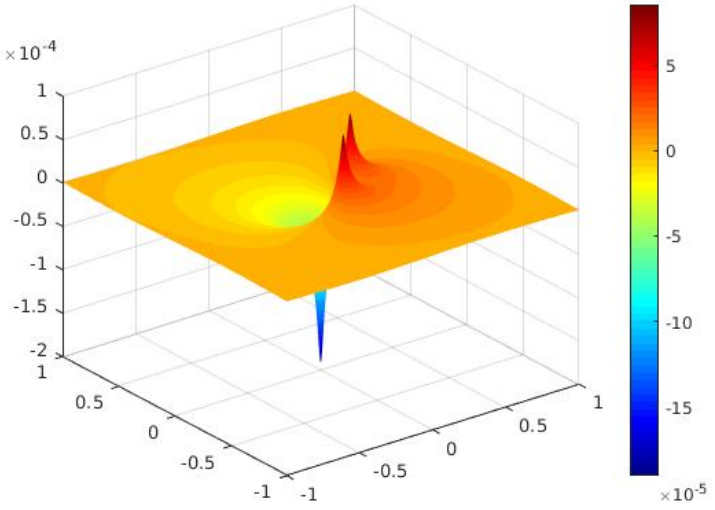
La solution ϕ de l'équation de Poisson

$$\Delta\phi(x) = f(x),$$

s'explicite alors sous la forme

$$\phi(x) = N * f(x) = \int_{\mathbb{R}^d} N_d(x-y) f(y) dy.$$





Détermination du potentiel de Newton en dimension 2

- Solution particulière de la forme

$$N(x) = g(r), \text{ avec } r = \sqrt{\|x\|} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}.$$

- Dérivées partielles

$$\begin{cases} \partial_{x_i} N(x) & = g'(r)\frac{x_i}{\|x\|} \\ \partial^2_{x_i^2} N(x) & = g'(r)\frac{1}{\|x\|} + g''(r)\frac{x_i^2}{\|x\|^2} - g'(r)\frac{x_i^2}{\|x\|^3} \\ \Delta N(x) & = \frac{1}{r}g'(r) + g''(r) \end{cases}$$

- Equation de Poisson pour $r > 0$:

$$\Delta N(x) = \frac{1}{r}g'(r) + g''(r) = 0,$$

- Solution de la forme

$$N(x) = c_2 log(r).$$

Estimation de la constante c_2

Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$, alors on vérifie que

$$\begin{aligned} \varphi(0) &= \langle \delta, \varphi \rangle = \langle \Delta N(x), \varphi \rangle = \langle N(x), \Delta \varphi \rangle \\ &= \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\mathbb{R}^2 \setminus B(0,\varepsilon)} N(x) \Delta \varphi dx = \lim_{\varepsilon \to 0} I_\varepsilon, \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} I_\varepsilon &= \int_{\partial B(0,\varepsilon)} [-N(x) \nabla \varphi \cdot \mathbf{n} + \varphi \nabla N(x) \cdot \mathbf{n}] \, ds(x) \\ &= \int_{\partial B(0,\varepsilon)} c_2 \left[log(\varepsilon) \nabla \varphi \cdot \mathbf{n} + \frac{1}{\varepsilon} \varphi \right] ds(x) \\ \to_{\varepsilon \to 0} \quad & c_2 2\pi \varphi(0) = \langle c_2 2\pi \delta, \varphi \rangle. \end{aligned}$$

On en déduit donc que $c_2 = \frac{1}{2\pi}$

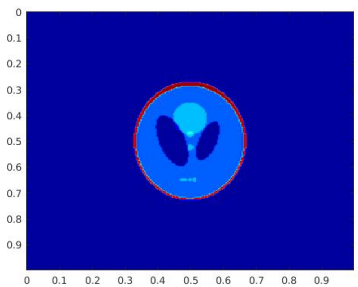
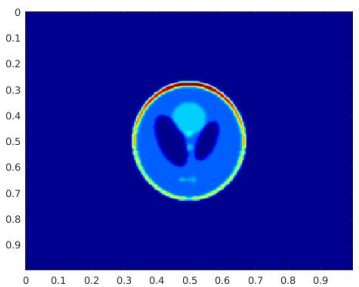
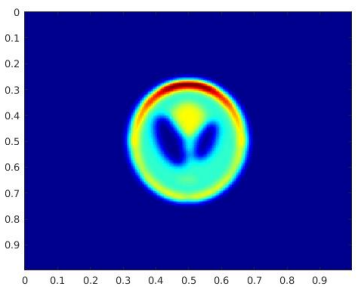
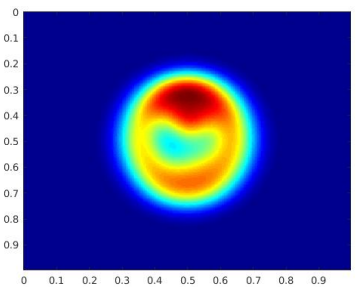
Résolution de l'équation de la chaleur dans $\mathbb{R}^d$

- Equation de la chaleur

$$\begin{cases} \partial_t T(x,t) = \Delta T(x,t) & \text{pour tout } (x,t) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+ \\ T(x,0) = \theta_0(x) & \text{pour tout } x \in \mathbb{R}^d, \end{cases}$$

où θ_0 est une fonction continue et bornée sur $\mathbb{R}^d$

- Exemple d'évolution dans $\mathbb{R}^2$

Résolution de l'équation de la chaleur dans $\mathbb{R}^d$

- Soit K_t, le noyau de la chaleur, défini comme la solution de l'équation de la chaleur associée à la distribution Dirac comme condition initiale, vérifie

$$K_t(x) = \frac{1}{(4\pi t)^{d/2}} exp(-\|x\|^2/(4t))$$

- Alors la solution T de l'équation de la chaleur

$$\partial_t T(x,t) = \Delta T(x,t) \quad \text{avec} \quad T(x,0) = \theta_0(x)$$

vérifie

$$T(x,t) = K_t * \theta_0(x) = \int_{\mathbb{R}^d} K_t(x-y)\theta_0(y)dy.$$

Noyau de la chaleur en dimension 1

- Noyau de la chaleur K_t

$$\partial_t K_t = \Delta K_t \quad \text{et} \quad K_t(.,0) = \delta$$

- Solution particulière de la forme

$$K_t(x,t) = \frac{1}{\sqrt{t}} g(x^2/t), \quad \text{avec} \quad \lim_{t\to 0} K_t(x,t) \to \int_{\mathbb{R}} g(x^2)dx\ \delta$$

- Dérivées partielles

$$\begin{cases} \partial_t K_t(x,t) & = -\frac{1}{2t^{3/2}} g(x^2/t) - \frac{1}{t^{3/2}} g'(x^2/t)\frac{x^2}{t} \\ \partial_x K_t(x,t) & = \frac{1}{t^{3/2}} g'(x^2/t) 2x \\ \partial^2_{x^2} K_t(x,t) & = \frac{2}{t^{3/2}} g'(x^2/t) + \frac{1}{t^{3/2}} g''(x^2/t)\frac{4x^2}{t} \end{cases}$$

Noyau de la chaleur en dimension 1

- Equation de la chaleur pour $t > 0$: avec $r = x^2/t$

$$0 = \partial_t K_t - \Delta K_t = -\frac{1}{t^{3/2}}\left(\frac{1}{2}g(r) + (2+r)g'(r) + 4rg''(r)\right)$$

- En remarquant que

$$\frac{1}{2}g(r) + (2+r)g'(r) + 4rg''(r) = \frac{1}{2}(g + 4g') + r(g + 4g')' = 0,$$

on en déduit que $g(r) = c\ exp(-r/4)$ est la bien solution recherchée.

- Noyau de la chaleur:

$$K_t(x,t) = c\frac{1}{\sqrt{t}}exp(-x^2/(4t)),$$

avec $c^{-1} = \int_{\mathbb{R}} g(x^2)dx = \sqrt{4\pi}$.

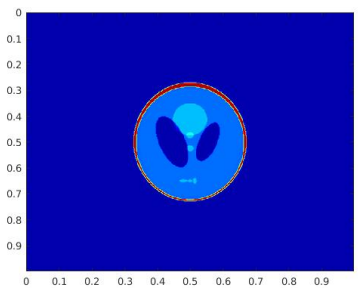
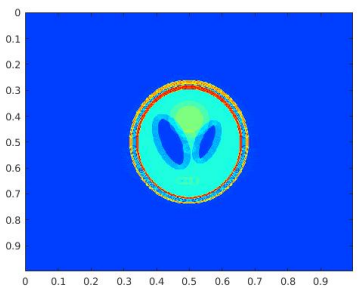
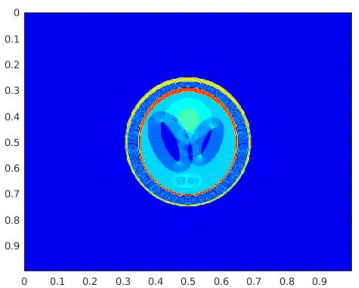
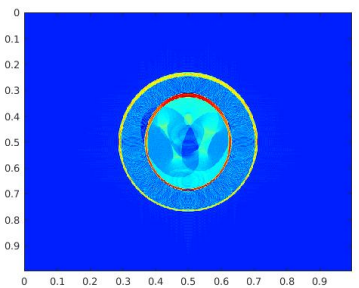
Equation des ondes dans $\mathbb{R}^d$

- Equation des ondes

$$\begin{cases} \partial_{tt}^2 u(x,t) = c^2 \Delta u(x,t) & \text{pour tout } (x,t) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+ \\ u(x,0) = f(x) & \text{pour tout } x \in \mathbb{R}^d, \\ \partial_t u(x,0) = g(x) & \text{pour tout } x \in \mathbb{R}^d, \end{cases}$$

où f et g sont des fonctions continues et bornées sur $\mathbb{R}^d$

- Exemple d'évolution dans $\mathbb{R}^2$

Equation des ondes dans $\mathbb{R}$

- Equation des ondes dans $\mathbb{R}$

$$\begin{cases} \partial_{tt}^2 u(x,t) & = c^2 \partial_{xx}^2 u(x,t), \\ u(x,0) & = f(x), \\ \partial_t u(x,0) & = g(x). \end{cases}$$

- Exploiter la factorisation de l'opérateur de ondes

$$\partial_{tt}^2 - c^2 \partial_{xx}^2 = (\partial_t - c\partial_x)(\partial_t + c\partial_x).$$

- En déduire que les fonctions

$$\Phi(x+ct) \quad \text{et} \quad \Psi(x-ct),$$

sont des solutions de l'équation des ondes pour toutes fonctions réelles Φ et Ψ de régularité $C^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

Décomposition de u

- On recherche u sous la forme

$$u(x,t) = \Phi(x+ct) + \Psi(x-ct).$$

- Les conditions initiales sur u montrent que

$$u(x,0) = f(x) \Longrightarrow \Phi(x) + \Psi(x) = f(x),$$

et

$$\begin{aligned} \partial_t u(x,0) = g(x) &\Longrightarrow -c(\Phi'(x) - \Psi'(x)) = g(x), \\ &\Longrightarrow \Phi(x) - \Psi(x) = \frac{1}{c}\int_0^x g(s)ds + \alpha. \end{aligned}$$

- On en déduit que

$$\begin{cases} \Phi(x) &= \frac{1}{2}\left(f(x) + \frac{1}{c}\int_0^x g(s)ds + \alpha\right), \\ \Psi(x) &= \frac{1}{2}\left(f(x) - \frac{1}{c}\int_0^x g(s)ds - \alpha\right). \end{cases}$$

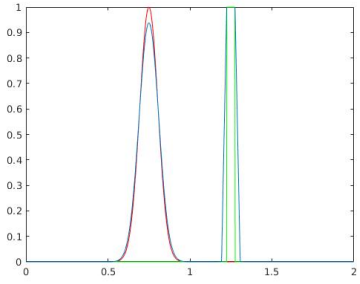
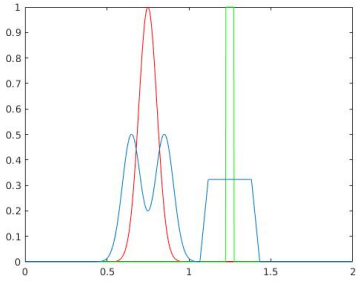
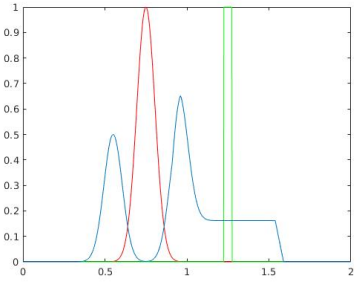
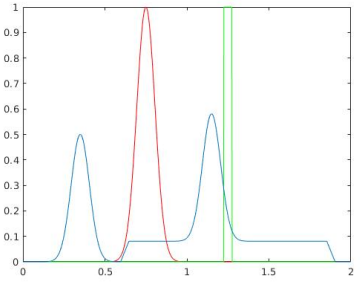
Solution de d'Alembert

La solution u de l'équation des ondes

$$\begin{cases} \partial_{tt}^2 u(x,t) & = c^2 \partial_{xx}^2 u(x,t), \\ u(x,0) & = f(x), \\ \partial_t u(x,0) & = g(x), \end{cases}$$

vérifie

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left(f(x+ct) + f(x-ct)\right) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(s)ds.$$

1 Équations différentielles ordinaires

2 Equations aux dérivées partielles

- Exemples d'EDP et motivations
- Opérateurs différentiels et propriétés
- Intégrales de surfaces et formule de Green
- EDP et Modélisation
- Exemples de résolution dans $\mathbb{R}^d$
- Exemples de résolution dans ensemble borné Ω

Cas de l'équation de Laplace sur un disque de rayon 1

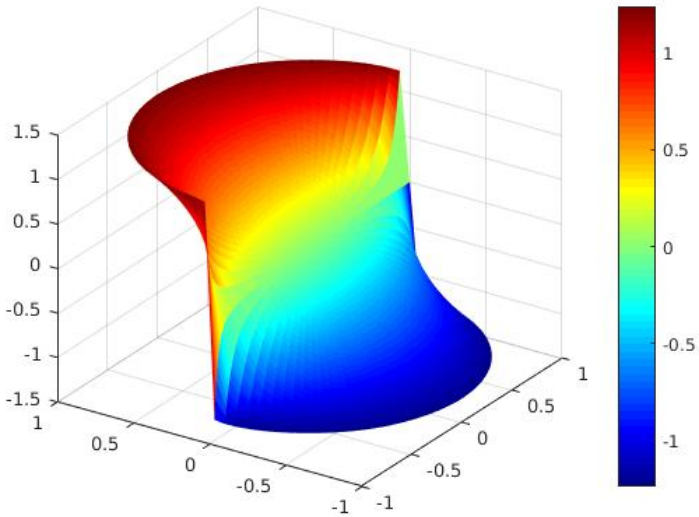
- Equation de Laplace sur le disque

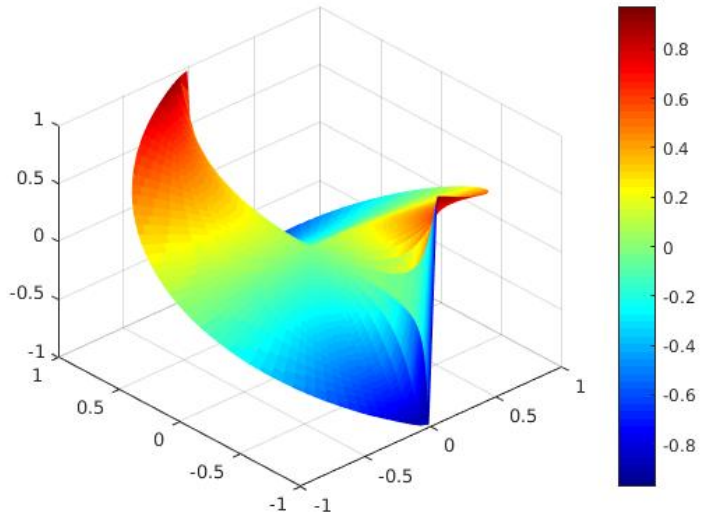
$$B = \{x \in \mathbb{R}^2; \|x\| \leq 1\}$$

avec une condition aux limites de type Dirichlet

$$\begin{cases} \Delta u(x) = 0, & \forall x \in B \\ u(y) = g(y), & \forall y \in \partial B \end{cases}$$

- Exemple de solutions





Méthode de séparation de variables

- On cherche une famille de solutions de l'équation de Laplace de la forme

$$u_n(x) = f_n(r)g_n(\theta),$$

où (r, θ) sont les coordonnées polaire. On trouve alors une famille de la forme

$$u_n(x) = r^n cos(n\theta) \quad \text{et} \quad \tilde{u}_n(x) = r^n sin(n\theta)$$

- On cherche alors la solution u du problème comme une combinaison linéaire de la famille précédente :

$$u(x) = A_0/2 + \sum_{n\in\mathbb{N}} A_n r^n cos(n\theta) + B_n r^n sin(n\theta)$$

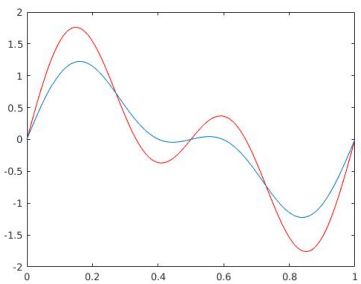
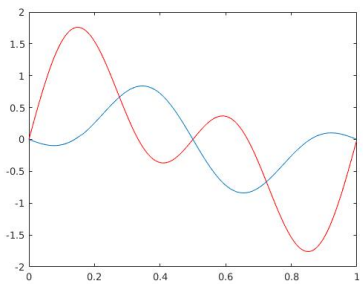
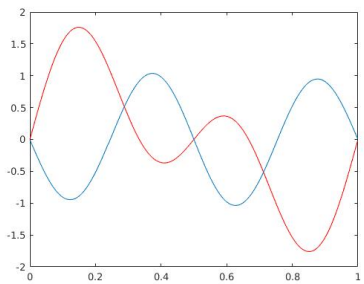
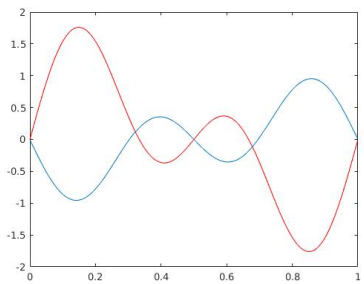
- Dans ce cas particulier, on peut montrer que les coefficients (A_n, B_n) s'identifient aux coefficients (a_n, b_n) de la série de Fourier de g.

Equation des ondes sur un intervalle borné

- Equation des ondes sur $[0, L]$ avec
  des conditions de bord de type Dirichlet homogène

$$\begin{cases} \partial_{tt}^2 u(x,t) = c^2 \partial_{xx} u(x,t), & \forall (x,t) \in [0,L] \times \mathbb{R}^+ \\ u(x,0) = f(x), \text{ et } \partial_t u(x,0) = g(x), & \forall x \in [0,L] \\ u(0,t) = u(L,t) = 0 & \forall t \in \mathbb{R}^+ \end{cases}$$

- Exemple d'évolution

Méthode de séparation de variables

- On cherche une famille de solutions de l'équation des ondes associée à la condition de Dirichlet sur $[0, L]$ et de la forme

$$u_k(x) = F_k(x)G_k(t).$$

On trouve alors

$$u_k(x) = \cos(ck\ell t)\sin(k\ell x) \quad \text{et} \quad \tilde{u}_k(x) = sin(ck\ell t)sin(k\ell x),$$

où $\ell = \pi/L$

- La solution u du problème initial est alors recherchée comme une combinaison linéaire de la famille précédente :

$$u(x,t) = \sum_{k\in\mathbb{N}^*} A_k \sin(k\ell x)\cos(kc\ell t) + \sum_{k\in\mathbb{N}^*} B_k sin(k\ell x)sin(kc\ell t).$$

Identification des coefficients (F_k, G_k)

- Décomposition en sinus des fonctions f et g :

$$S_f(x) = \sum_{k\in\mathbb{N}^*} a_k sin(k\ell x) \quad \text{et } S_g(x) = \sum_{k\in\mathbb{N}^*} b_k sin(k\ell x)$$

  Lien avec la décomposition en série des fonctions impaires $\overline{f}$ et $\overline{g}$ définies sur $[0, L]$ par $\overline{f}(x) = f(x)$ et $\overline{g}(x) = g(x)$?

- Conditions initiales:

$$\begin{cases} u(x,0) = f(x) & \Rightarrow \sum_{k\in\mathbb{N}^*} A_k sin(k\ell x) = \sum_{k\in N^*} a_k sin(k\ell x) \\ \partial_t u(x,0) = g(x) & \Rightarrow \sum_{k\in\mathbb{N}^*} B_k kc\ell sin(k\ell x) = \sum_{k\in N^*} b_k sin(k\ell x) \end{cases}$$

- Identification des coefficients (F_k, G_k):

$$A_k = a_k, \quad \text{et } B_k = b_k/(ck\ell), \quad \forall k \in \mathbb{N}^*$$