Liste des Exercices :

Exercice 1.4.1 (Équivalence des conditionnements) *L'objectif de cet exercice est de vérifier l'équivalence des normes $l^p(\mathbb{C}^n)$ et des conditionnements associés.*

Soit $p \geq 1$. Pour tout $v = (v_1, \dots, v_n)^T \in \mathbb{C}^n$, posons $\|v\|_p = (\sum_{i=1}^n |v_i|^p)^{1/p}$ et $\|v\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n}\{|v_i|\}$.

Montrer que pour tout $v \in \mathbb{C}^n$, $\|v\|_\infty \leq \|v\|_p \leq n^{1/p}\|v\|_\infty$ et en déduire que $\lim_{p\to\infty} \|v\|_p = \|v\|_\infty$.

Soient p et $q \in \mathbb{R}^+$ tels que $1 \leq p \leq q < +\infty$. Montrer que pour tout $v \in \mathbb{C}^n$, $\|v\|_p \leq n^{1/p-1/q}\|v\|_q$.

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{C})$ une matrice inversible. Montrer les inégalités suivantes :

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{cond}_2(A)}{n} \leq \quad & \mathrm{cond}_1(A) && \leq n \,\mathrm{cond}_2(A),\\
\frac{\mathrm{cond}_\infty(A)}{n} \leq \quad & \mathrm{cond}_2(A) && \leq n \,\mathrm{cond}_\infty(A),\\
\frac{\mathrm{cond}_1(A)}{n^2} \leq \quad & \mathrm{cond}_\infty(A) && \leq n^2 \,\mathrm{cond}_1(A).
\end{aligned}$$

Exercice 1.4.2 (Calcul de conditionnement) *Soit $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ une matrice inversible.*

Quelle relation existe-t-il en général entre $\mathrm{cond}(A^2)$ et $[\mathrm{cond}(A)]^2$?

Supposons que A soit symétrique. Montrer que $\mathrm{cond}_2(A^2) = [\mathrm{cond}_2(A)]^2$.

Exercice 1.4.3 (Estimation du conditionnement) *Soit $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ vérifiant : il existe $\theta > 0$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$,*

$$\|Ax\| \;\geq\; \theta\,\|x\|. \tag{1.9}$$

Montrer que l'inégalité (1.9) est équivalente à dire que A est inversible et que $1/\|A^{-1}\|$ est le meilleur des minorants $\theta > 0$.

Supposons que A est à diagonale dominante stricte, c'est-à-dire que

$$|a_{i,i}| \;>\; \sum_{j\neq i} |a_{i,j}|, \quad \forall i \,\in \{1, \dots, n\}.$$

Montrer que l'hypothèse (1.9) est satisfaite et donner une valeur pour θ lorsque la norme $\|.\|_\infty$ est utilisée.

Montrer que si A est inversible alors il existe $\delta > 0$ tel que $A+E$ est inversible pour toute matrice E vérifiant $\|E\| \leq \delta$, où $\|.\|$ est une norme matricielle subordonnée.

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ inversible. Montrer que si B est singulière alors

$$\frac{1}{\mathrm{cond}(A)} \leq \frac{\|A-B\|}{\|A\|},$$

où $\|.\|$ est une norme matricielle subordonnée.

Utiliser ce résultat pour estimer le conditionnement des matrices suivantes :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ \\ 1,0001 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3,9 & 1,8 \\ \\ 6,2 & 2,7 \end{pmatrix}.$$

Comparer à la valeur exacte du conditionnement. À votre avis, comment faut-il choisir B pour obtenir une bonne estimation ?

Exercice 1.4.4 (Décomposition $L\,D\,L^\star$) *Une matrice $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{C})$ admet une décomposition $L\,D\,L^\star$ s'il existe une matrice L triangulaire inférieure avec seulement des 1 sur la diagonale et une matrice diagonale réelle D avec $D_{i,i} > 0$ pour tout $i = 1\ldots,n$ telles que $A \;=\; L\,D\,L^\star$.*

Soit A une matrice admettant une factorisation $L\,D\,L^\star$. Montrer que A est hermitienne et définie positive.

Soit A une matrice hermitienne définie positive telle que $A \;=\; R^\star\,R$ où R est la matrice obtenue par la factorisation de Cholesky. Notons B la matrice diagonale définie par $B_{i,i} \;=\; R_{i,i}$ pour tout $i = 1,\ldots,n$. Montrer que B est inversible et calculer les éléments diagonaux de $R^\star\,B^{-1}$.

En déduire que A admet une décomposition $L\,D\,L^\star$ et que cette décomposition est unique.

Indiquer comment résoudre le système $Ax = b$ avec $b \in \mathbb{C}^n$ donné, à l'aide de la décomposition $L\,D\,L^\star$ de A.

Exercice 1.4.5 (Décomposition QR par Gram-Schmidt) *Considérons $\mathbb{C}^n$ muni du produit scalaire usuel et notons $Gl_n(\mathbb{C})$ le groupe des matrices inversibles de taille n, $U_n(\mathbb{C})$ le groupe des matrices unitaires de taille n et $TS_n^+(\mathbb{C})$ le groupe des matrices triangulaires supérieures de taille n, dont tous les éléments diagonaux sont strictement positifs.*

Soit $\{a_1,\ldots,a_n\}$ une base de $\mathbb{C}^n$. Montrer que nous pouvons trouver $\{q_1,\ldots,q_n\}$ une base orthonormée de $\mathbb{C}^n$ et des nombres complexes $(r_{j,i})_{1\le i\le n, 1\le j\le i}$ tels que les éléments diagonaux $r_{i,i} > 0$ et

$$a_i \;=\; \sum_{j=1}^{i} r_{j,i}\,q_j, \quad \forall i \in \{1,\ldots,n\}.$$

En déduire que pour $A \in Gl_n(\mathbb{C})$, il existe $(Q,R) \in U_n(\mathbb{C}) \times TS_n^+(\mathbb{C})$ telles que $A = QR$.

Montrer que $TS_n^+ \cap U_n \;=\; \{I_n\}$ et en déduire l'unicité de la décomposition $Q\,R$.

Montrer que la factorisation QR permet de résoudre le système $Ax = b$.

Exercice 1.4.6 (Méthode des relaxations successives) *L'idée de la méthode des relaxations successives est de dire que $x^{(k+1)}$ est une combinaison linéaire de la solution approchée à l'étape précédente $x^{(k)}$ et de la solution approchée $\tilde{x}^{(k+1)}$ calculée par Gauss-Seidel. Plus précisément, en effectuant la décomposition habituelle $A = D - E - F \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$, nous construisons $x^{(k+1)}$ comme suit,*

$$\left\{ \begin{array}{l} x^{(k+1)} \;=\; \omega\,\tilde{x}^{(k+1)} \;+\; (1-\omega)\,x^{(k)}, \\ \\ D\,\tilde{x}^{(k+1)} \;-\; E\,x^{(k+1)} \;=\; F\,x^{(k)} \;+\; b. \end{array} \right. \tag{1.10}$$

Donner l'expression de $x^{(k+1)}$ en fonction de $x^{(k)}$.

Si A est symétrique et définie positive, montrer que pour $0 < \omega < 2$, la méthode des relaxations successives converge.

Exercice 1.4.7 (Méthode itérative de Richardson) *Considérons simplement la décomposition $A = M - N$ avec $M = I_n$ et $N = I_n - A$, l'algorithme est donné par*

$$x^{(k+1)} = (I_n - A)\, x^{(k)} + b = x^{(k)} - \Big(A\, x^{(k)} - b\Big).$$

Montrer que si pour tout $\lambda(A) \in \mathrm{Sp}(A)$, $|1 - \lambda(A)| < 1$ alors la méthode est convergente.

Cette dernière condition a peu de chance d'être vérifiée en général. Pour remédier à ce problème, nous introduisons une décomposition similaire $A = M - N$ avec $M = \frac{1}{\gamma} I_n$ et $N = \frac{1}{\gamma} I_n - A$.

- *Écrire l'algorithme correspondant.*
- *Montrer que la méthode est bien convergente dès que $0 < \gamma < 2/\rho(A)$.*

En notant $r^{(k)} := -A\, x^{(k)} + b$, le résidu à l'étape k. La méthode de Richardson s'écrit alors $x^{(k+1)} = x^{(k)} + \gamma\, r^{(k)}$. En déduire que $x^{(k)} - x^{(0)}$ est une combinaison linéaire de $\{r^{(0)}, A\, r^{(0)}, \ldots, A^{k-1}\, r^{(0)}\}$.

Note 1 *Nous disons que $x^{(k)} - x^{(0)}$ appartient à l'espace de Krylov $\mathcal{K}_k(A, r^{(0)})$ donné par*

$$\mathcal{K}_k(A, r^0) = \mathrm{Vect}\left\{r^{(0)}, A\, r^{(0)}, \ldots, A^{k-1}\, r^{(0)}\right\}.$$

La plupart des méthodes d'approximation développées récemment consistent à construire une base de l'espace de Krylov $\mathcal{K}_k(A, r^0)$ dans laquelle nous exprimons la solution numérique.

Exercice 1.4.8 (Les matrices creuses) *Il n'y a pas de définition précise d'une matrice creuse, disons qu'une matrice creuse est une matrice contenant beaucoup de zéros. Dans ce cas, de nombreux calculs peuvent être évités. Par exemple, en considérant le problème de propagation de la chaleur posé sur l'intervalle $]0, 1[$, ce qui correspond au chauffage d'un fil, nous recherchons des solutions u vérifiant l'équation de Poisson*

$$-u''(x) = f(x), \tag{1.11}$$

où f est une fonction supposée deux fois différentiable et les conditions aux limites sont données par $u(0) = u(1) = 0$.

Pour $i \in \{0, \ldots, n+1\}$, nous notons v_i une approximation de la solution u de l'équation de Laplace au point $x_i = i\,\Delta x$ avec $\Delta x = 1/(n+1)$. En reprenant les arguments de la partie 1.1 sur l'équation de la chaleur, montrer que $v_h \in \mathbb{R}^n$ est solution de $A_h\, v_h = b$, avec $A_h = \frac{1}{h^2} A$,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \ldots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \ldots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \tag{1.12}$$

et le vecteur $b \in \mathbb{R}^n$ *est donné par* $b = (f(x_1), \ldots, f(x_n))^T$.

Montrer que la matrice $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ *est symétrique et définie positive.*

Justifier que A *admet une décomposition* LU.

Calculer les matrices L *et* U *et montrer que cela nécessite seulement* $O(n)$ *opérations.*