Liste des Exercices :

Exercice 2.5.1 (Propriétés des valeurs propres) *Soient p et n des entiers naturels non nuls tels que $n \leq p$, et soient $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$.*

Montrer que $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ est valeur propre de AB si et seulement si elle l'est de BA.

Montrer que si $\lambda = 0$ est valeur propre de AB alors λ est valeur propre de BA.

Conseil 1 *Il est recommandé de distinguer les cas $B\,x \neq 0$ et $B\,x = 0$, où x est le vecteur propre associé à la valeur propre $\lambda = 0$ de $A\,B$. Pour le second cas, distinguer selon que* $\mathrm{Im}A = \mathbb{R}^n$ *ou non.*

Montrer, en prenant par exemple $n = 1$ et $p = 2$, que λ peut être une valeur propre de $B\,A$ sans être valeur propre de $A\,B$.

Supposons que $n = p$, en déduire que l'ensemble des valeurs propres de $A\,B$ est égal à l'ensemble des valeurs propres de la matrice $B\,A$.

Exercice 2.5.2 (Théorème de Gershgorine) *Soit $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$.*

Montrer que pour tout vecteur propre $v \in \mathbb{K}^n$ de A, $|v_i| = \max_{1\leq j\leq n} |v_j|$ vérifie

$$\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} |a_{i,j}| \;\geq\; \left| \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} a_{i,j}\, \frac{v_j}{|v_i|} \right| \;=\; |\lambda \,-\, a_{i,i}|.$$

En déduire que $\mathrm{Sp}(A) \subset \cup_{i=1}^{n} \mathcal{D}_i$ *avec*

$$\mathcal{D}_i \;:=\; \left\{ r \in \mathbb{C}, \quad |r - a_{i,i}| \leq \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} |a_{i,j}| \right\}.$$

Exercice 2.5.3 (Convergence de la méthode de la puissance inverse) *Soit $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ une matrice symétrique définie positive n'ayant que des valeurs propres simples. À partir de la méthode de la puissance, nous souhaitons calculer la valeur approchée de la plus petite valeur propre $\lambda_n > 0$.*

Quel est le lien entre les éléments propres de A et A^{-1} ?

En s'inspirant de l'algorithme de la méthode de la puissance, proposer alors un algorithme pour le calcul de la plus petite valeur propre de A.

Montrer que cet algorithme fournit une suite qui converge vers λ_n.

Exercice 2.5.4 (Approximation des valeurs propres du Laplacien) *Cet exercice est consacré à la théorie spectrale des équations aux dérivées partielles, c'est-à-dire à la recherche des valeurs propres et des fonctions propres d'une équation différentielle. Jusqu'à présent, nous avons défini la notion de valeur propre et de vecteur propre pour une matrice $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ mais nous pouvons généraliser cette définition à un opérateur différentiel en dimension infinie. Cela permet d'étudier des solutions particulières (dites oscillantes en temps) d'un problème d'évolution et de construire des méthodes de* *résolution. Plus précisément, nous recherchons une fonction u et une valeurs propre $\lambda \in \mathbb{R}$ telles que le couple (u, λ) satisfait l'équation de Laplace suivante*

$$-u''(x) \,=\, \lambda\, u(x), \quad x \in]0,1[, \tag{2.6}$$

avec les conditions aux limites $u(0) = u(1) = 0$.

Note 2 *Observons qu'ici la résolution est explicite en utilisant les séries de Fourier à coefficients réels et les fonctions de bases $x \mapsto \sin(k\,\pi\,x)$. Nous trouvons alors*

$$\lambda_k = k^2\,\pi^2, \qquad \varphi_k(x) = \sin(k\,\pi\,x).$$

En décomposant l'intervalle $[0,1]$ en sous-intervalles réguliers $[x_i, x_{i+1}]$ avec $i = 0,\dots,n$, les points x_i sont donnés par $x_i \,=\, i\,h$ avec $h \,=\, 1/(n+1)$ et n est le nombre total de points de discrétisation.

Soit $v_h = (v_1,\dots,v_n) \in \mathbb{R}^n$, où la composante v_i désigne une valeur approchée de $u(x_i)$ la solution de (2.6).

À l'aide d'un développement de Taylor, montrer que $(v_h, \lambda_h) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ est solution de l'équation algébrique

$$\begin{cases} A_h\, v_h = \lambda_h\, v_h, \\[2ex] \|v_h\|_2 = 1. \end{cases}$$

où $A_h = \frac{1}{h^2}\, A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ où A est donnée par

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}. \tag{2.7}$$

Montrer que la matrice $A_h \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ est symétrique définie positive et ses valeurs propres sont données par

$$\begin{cases} \lambda_h^{(k)} \,=\, \dfrac{4}{h^2}\,\sin^2\left(\dfrac{k\,\pi}{2(n+1)}\right), \quad k \in \{1,\dots,n\}, \\ v_h^{(k)} = (v_1^{(k)},\dots,v_n^{(k)}), \text{ avec } v_j^{(k)} \,=\, \sin\left(\dfrac{j\,k\,\pi}{(n+1)}\right). \end{cases}$$

Conseil 2 *Appliquer le Théorème de Gershgorine pour montrer que si $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$ alors $\lambda \in [0,4]$. Puis, écrire $\lambda \,=\, 2 - 2\cos(\theta)$ avec $\theta \in]0,\pi[$.*

Note 3 *Il n'est pas toujours possible de calculer de manière exacte l'ensemble du spectre d'une matrice. Nous souhaitons donc proposer un algorithme permettant d'approcher l'ensemble des éléments propres de la matrice A_h, c'est la méthode de Lanczòs qui s'inspire directement de la méthode de la puissance.*

Supposons que l'élément propre $(v_{h,1}, \lambda_{h,1})$ est connu, où $\lambda_{h,1}$ est la plus grande valeur propre en module de A_h calculée à partir de la méthode de la puissance avec la donnée initiale $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Posons $x^{(0)} = x_0 - \langle x_0, v_{h,1}\rangle\, v_{h,1}$, où $\langle ., .\rangle$ désigne le produit scalaire euclidien.

Construisons ensuite $z^{(1)} = A\,x^{(0)} - \langle A\,x^{(0)}, v_{h,1}\rangle\, v_{h,1}$ et procédons à l'étape de normalisation $v_{h,2}^{(1)} = z^{(1)}/\|z^{(1)}\|_2$.

Montrer que $v_{h,2}^{(1)}$ est orthogonal à $v_{h,1}$ et en déduire un algorithme pour le calcul de $\lambda_{h,2}$ la seconde valeur propre la plus grande en module.

Conseil 3 *Rappelons que puisque A_h est symétrique, l'ensemble des vecteurs propres de A_h forme une base orthogonale.*

Proposer alors un algorithme permettant d'approcher l'ensemble des valeurs propres de la matrice A_h. En faisant varier le paramètre h, vérifier que les valeurs propres λ_h approchent bien les valeurs propres de (2.6).