Liste des Exercices :

Exercice 3.4.1 (Calcul de racine carrée) *Considérons le problème du calcul de $\sqrt{2}$. Cela revient à trouver le zéro positif $\alpha = \sqrt{2}$ de la fonction $f(x) = x^2 - 2$.*

Posons $\phi(x) = -x^2/4 + x + 1/2$. Vérifier que $\alpha = \sqrt{2}$ est un point fixe de la fonction et montrer que $\phi([1,2]) \subset [1,2]$. En déduire que pour tout $x^{(0)} \in [1,2]$, il existe une constante $C > 0$ telle que $|x^{(k)} - \alpha| \leq C^k \, |x^{(0)} - \alpha|$ pour tout $k \geq 0$.

Quel est le comportement de la suite $(x^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ lorsque $k \to +\infty$?

Combien d'itérations de la méthode de point fixe sont nécessaires pour trouver une valeur approchée de $\sqrt{2}$ qui soit exacte jusqu'au huitième chiffre après la virgule ?

Exercice 3.4.2 (Calcul de racine cubique) *Nous souhaitons calculer les zéros de la fonction $f(x) = x^3 - 2$ en utilisant la méthode de point fixe $x^{(k+1)} = \phi(x^{(k)})$ avec ϕ donnée par*

$$\phi(x) \,=\, \frac{2 \,-\, x^3}{3\, x^2} \,+\, x.$$

Notons $\alpha = \sqrt[3]{2}$ la solution du problème.

Vérifier que $\phi(\alpha) = \alpha$ et montrer que lorsque $x^{(0)} \in [1,2]$, la méthode du point fixe est convergente.

Montrer qu'en définitive la méthode est d'ordre deux.

Exercice 3.4.3 (Application des méthodes de point fixe et de Newton) *Nous voulons résoudre $f(x) = 0$ avec $f(x) = x - \sin(x)/5 \,-\, 1/2$ en utilisant la méthode du point fixe et de Newton-Raphson. Soit $\bar{x} \in \mathbb{R}$ une solution de ce problème.*

Méthode du point fixe

- *Construire une fonction ϕ qui soit strictement contractante $|\phi(x) - \phi(y)| \leq k|x - y|$ avec $0 < k < 1$ et $\phi(\bar{x}) = \bar{x}$.*
- *En déduire une suite $(x^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ qui converge vers la solution de $f(\bar{x}) = 0$.*
- *Donner la vitesse de convergence de l'algorithme.*

Méthode de Newton-Raphson

- *Écrire la méthode de Newton pour approcher la solution de $f(\bar{x}) = 0$.*
- *Montrer que la méthode est localement convergente. Est-elle globalement convergente ?*
- *Estimer la vitesse de convergence $|x^{(k+1)} - \bar{x}|$.*

Exercice 3.4.4 (Recherche de racines de polynômes) *Soit $p(x)$ un polynôme de degré $n \geq 2$ à coefficients réels et admettant n racines distinctes réelles $x_n < x_{n-1} < \ldots < x_1$. Appliquer la méthode de Newton-Raphson pour l'approximation des racines de p.*

Démontrer que pour toute valeur initiale $x^{(0)} > x_1$, la suite $(x^{(k)})_{k\geq 0}$ donnée par l'algorithme de Newton-Raphson est strictement décroissante et converge vers la plus grande racine x_1.

Montrer que la convergence est quadratique.

Exercice 3.4.5 (Applications aux systèmes) *Soit le système d'équations non linéaire suivant :*

$$\left\{\begin{array}{l} -5\, x_1 \,+\, 2\, \sin(x_1) \,+\, 2\, \cos(x_2) \,=\, 0, \\[2ex] 2\, \cos(x_1) \,+\, 2\, \sin(x_2) \,-\, 5\, x_2 \,=\, 0, \end{array}\right. \tag{3.16}$$

Notons $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ *une solution de ce système.*

Méthode du point fixe

- *Montrer que ce système peut s'écrire sous la forme* $\phi(\bar{x}) = \bar{x}$ *où* ϕ *est strictement contractante pour la norme* $\|.\|_1$.
- *Vérifier que la solution* $\bar{x}$ *est unique.*
- *À partir de la fonction* ϕ*, construire une suite* $(x^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ *qui converge vers* $\bar{x}$ *et estimer la vitesse de convergence.*

Méthode de Newton

- *Écrire un algorithme de Newton pour le système (3.16).*
- *La solution de cet algorithme est-elle toujours bien définie ?*

Exercice 3.4.6 (Calcul d'éléments propres) *Considérons* $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ *une matrice symétrique et* $\mu \in \mathbb{R}$ *une valeur propre simple de* A *et* $v \in \mathbb{R}^n$ *un vecteur propre associé à* μ *tel que* $\|v\|_2 = 1$.

Écrire le système sous la forme $F(x, \lambda) = 0$ *où* F *est une fonction de* $\mathbb{R}^{n+1}$ *dans* $\mathbb{R}^{n+1}$. *En déduire l'algorithme de Newton-Raphson associé à ce problème.*

Calculer ∇F *et montrer que l'algorithme est bien défini et localement convergent.*