

## Liste des Exercices :

**Exercice 4.4.1 (Fêtes de Pâques)** À l'approche des fêtes de Pâques, un artisan chocolatier décide de confectionner des œufs en chocolat. En allant inspecter ses réserves, il constate qu'il lui reste 18 kg de cacao, 8 kg de noisettes et 14 litres de lait. Ce chocolatier a deux spécialités : l'œuf extra et l'œuf sublime. Un œuf extra nécessite 1 kg de cacao, 1 kg de noisettes et 2 litres de lait tandis qu'un œuf sublime nécessite 3 kg de cacao, 1 kg de noisettes et 1 litre de lait. Il fera un bénéfice de 20 euros en vendant un œuf extra, et de 30 euros en vendant un œuf sublime.

Écrire ce problème sous la forme d'un problème de programmation linéaire.

Combien d'œufs extra et sublime doit-il fabriquer pour faire le plus grand bénéfice possible ?

**Exercice 4.4.2 (Organisation du travail)** La fabrication d'une pièce  $P_1$  a un prix de revient de 150 euros et celle d'une pièce  $P_2$  coûte 100 euros. Chaque pièce est traitée successivement dans trois ateliers. Le nombre d'heures-machines par pièce est indiqué dans le tableau suivant :

Atelier	A	B	C
Pièce 1	3 h	5 h	2 h
Pièce 2	1 h	3 h	3 h

Pour éviter le chômage technique, l'atelier A doit obligatoirement fournir 1 200 heures machines, l'atelier B 3 000 heures machines et l'atelier C 1 800 heures machines.

Écrire ce problème sous la forme d'un problème de programmation linéaire.

Combien faut-il fabriquer de pièces  $P_1$  et  $P_2$  pour minimiser le coût de revient de l'ensemble de la production et pour assurer le fonctionnement des trois ateliers excluant tout chômage technique ?

**Exercice 4.4.3** Soient  $A \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$  avec  $n < m$  telle que  $A^T A$  soit inversible et  $b \in \mathbb{R}^n$  un vecteur fixé. Considérons  $f : \mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{R}$  définie par  $f(x) = \|Ax - b\|^2$ .

Déterminer le gradient et la hessienne de la fonction  $f$ .

Montrer que les points minimum  $\bar{x} \in \mathbb{R}^m$  solution de

$$\begin{cases} \bar{x} \in \mathbb{R}^m \\ f(\bar{x}) = \min_{x \in \mathbb{R}^m} f(x) \end{cases} \quad (4.30)$$

vérifient  $A^T A \bar{x} = A^T b$ .

Résoudre le problème d'optimisation (4.30).

**Exercice 4.4.4 (Maximisation de l'aire d'un rectangle)** Cherchons à maximiser l'aire d'un rectangle de périmètre donné et égal à 2.

Montrer que ce problème peut se formuler comme un problème de minimisation de la forme,

$$f(\bar{x}) = \min_{y \in K} f(y)$$

où  $K$  est de la forme  $K = \{x \in \mathbb{R}^2, g(x) = 0\}$ .

Montrer que le problème de minimisation ainsi obtenu est équivalent au problème

$$\begin{cases} \bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2)^T \in \bar{K} \\ f(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \leq f(x_1, x_2), \quad \forall (x_1, x_2)^T \in \bar{K}, \end{cases}$$

où  $\bar{K} = K \cap [0, 1]^2$ . En déduire que le problème de minimisation de l'aire admet au moins une solution.

Calculer  $\nabla g(x)$  pour  $x \in K$  et en déduire que  $\bar{x} = (1/2, 1/2)^T$ .

**Exercice 4.4.5 (Minimisation d'une fonctionnelle quadratique)** Soit  $f$  une fonction quadratique, c'est-à-dire

$$f(x) = \frac{1}{2}x^T A x - x^T b,$$

où  $A \in \mathcal{M}_{m,m}(\mathbb{R})$  est une matrice symétrique définie positive et  $b \in \mathbb{R}^m$ . Soit  $g$  une fonction de la forme  $g(x) = Bx$ , où  $B \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$  avec  $0 < n < m$ . Posons

$$K = \{x \in \mathbb{R}^m, g(x) = 0\}$$

et cherchons à résoudre le problème de minimisation sous contraintes :  $\bar{x} \in K$  et

$$f(\bar{x}) = \min_{x \in K} f(x).$$

Montrer que l'ensemble  $K$  est non vide, fermé et convexe. En déduire que le problème de minimisation sous contraintes admet une unique solution.

Soit  $\bar{x} \in K$  la solution du problème de minimisation. Montrer qu'il existe  $\bar{\lambda} \in \mathbb{R}$  tel que  $\bar{y} = (\bar{x}, \bar{\lambda})^T$  soit l'unique solution du système

$$\begin{bmatrix} A & d \\ d^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{\lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b \\ c \end{bmatrix}.$$

**Exercice 4.4.6 (Méthode du gradient à pas variable)** Soient  $E$  un espace de Hilbert réel et  $f : E \mapsto \mathbb{R}$  une fonctionnelle de classe  $\mathcal{C}^1(E, \mathbb{R})$ . Supposons que  $f$  satisfait une **condition d'ellipticité**, c'est-à-dire il existe  $\alpha > 0$  telle que pour tout  $x, y \in E$ ,

$$\langle \nabla f(x) - \nabla f(y), x - y \rangle > \alpha \|x - y\|^2$$

et une condition lipschitzienne sur  $\nabla f$ , il existe  $M > 0$  telle que  $\|\nabla f(x) - \nabla f(y)\| \leq M \|x - y\|$ . Considérons alors le problème de minimisation

$$\begin{cases} \text{trouver } \bar{x} \in E, \\ f(\bar{x}) = \min_{x \in E} f(x), \end{cases}$$

et utilisons la méthode du gradient à pas variable, qui consiste en la construction d'une suite  $(x^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$  telle que pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \rho_k \nabla f(x^{(k)}),$$

où le paramètre  $\rho_k$  est ajusté au cours des itérations selon des critères particuliers.

*Montrer que le problème de minimisation admet une solution unique. Comment est-elle caractérisée ?*

*Montrer que pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $\|x^{(k+1)} - x\|^2 \leq \tau(\rho_k) \|x^{(k)} - \bar{x}\|^2$ , où  $\tau(\rho)$  est un polynôme du second degré.*

*En déduire que s'il existe deux nombres  $a$  et  $b$  tels que pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $0 < a \leq \rho_k \leq b < 2\alpha/M^2$ , la méthode du gradient à pas variable converge et la convergence est géométrique : il existe  $\beta \in ]0, 1[$ ,  $\|x^{(k)} - \bar{x}\| \leq \beta^k \|x_0 - \bar{x}\|$ .*

*Les conditions sont-elles vérifiées pour une fonctionnelle quadratique elliptique  $f : x \in \mathbb{R}^m \mapsto \frac{1}{2}x^T Ax - b^T x$  avec  $A$  symétrique et définie positive. Que représentent alors  $\alpha$  et  $M$  ?*