



FIG. 5.12 – Les deux figures représentent ce même signal où nous avons tronqué les coefficients de Fourier à 10 % de la valeur maximale.

Liste des Exercices :

Exercice 5.4.1 (Symétrie des différences divisées) Soient x_0, x_1, \dots, x_n des points distincts d'un intervalle $[a, b]$. Démontrer l'identité

$$f[x_0, \dots, x_n] = \sum_{j=0}^n f(x_j) \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^n \frac{1}{x_j - x_k}.$$

En déduire que la différence divisée $f[x_0, x_1, \dots, x_n]$ est une fonction symétrique, c'est-à-dire pour tout permutation σ ,

$$f[x_{\sigma(0)}, x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}] = f[x_0, x_1, \dots, x_n].$$

Exercice 5.4.2 (Convergence de l'interpolation de Lagrange) Soient $\alpha > 1$, une fonction f définie sur $[-1, 1]$ par $f(x) = 1/(x - \alpha)$ et P_n le polynôme d'interpolation de Lagrange de f aux $n + 1$ points distincts $x_i = -1 + ih$ avec $i \in \{0, \dots, n\}$ et $h = 2/n$.

Montrer que si $\alpha > 3$, alors $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - P_n\|_{\infty} = 0$.

Dans la pratique, nous préférons utiliser des polynômes de degré peu élevé sur chaque intervalle $[x_i, x_{i+1}]$, avec $i \in \{0, \dots, n - 1\}$.

Notons f_n la fonction continue telle que $f_n|_{[x_i, x_{i+1}]}$ est un polynôme de degré un et $f_n(x_i) = f(x_i)$ pour tout $0 \leq i \leq n$.

- Soit $i = 0, \dots, n - 1$. Écrire l'approximation de Lagrange de degré un $P_1^{(i)}$ de f sur l'intervalle $[x_i, x_{i+1}]$.
- Puis montrer que si $\alpha \notin [-1, 1]$, alors $\|f - f_n\|_{\infty} \leq C/n^2$ et donc que f_n converge uniformément vers f lorsque n tend vers l'infini.

Exercice 5.4.3 (Sur les polynômes de Legendre) Les polynômes de Legendre sont définis par l'expression

$$\begin{cases} P_0 = 1, \\ P_n(x) = \frac{n!}{(2n)!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n. \end{cases}$$

Montrer que P_n est un polynôme de degré n et déterminer le coefficient devant x^n de P_n .

En utilisant des intégrations par parties, montrer que pour $m \leq n$

$$\int_{-1}^1 \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n \frac{d^m}{dx^m} (x^2 - 1)^m dx = (-1)^n \int_{-1}^1 \frac{d^{n+m}}{dx^{n+m}} (x^2 - 1)^m (x^2 - 1)^n dx.$$

En déduire que

$$\int_{-1}^1 P_n(x) P_m(x) dx = \begin{cases} 0, & \text{si } n \neq m, \\ (-1)^n \frac{(n!)^2}{(2n)!} I_n, & \text{sinon,} \end{cases}$$

avec $I_n = \int_{-1}^1 (x^2 - 1)^n dx$.

Relation de récurrence

– Montrer que $I_n = -\frac{2n}{(2n+1)} I_{n-1}$.

– En justifiant que $x P_{n-1}(x) = P_n(x) + \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i P_i(x)$, avec $\alpha_j \in \mathbb{R}$, et $0 \leq j \leq n-1$, calculer en fonction de n et I_n

$$\int_{-1}^1 x P_n(x) P_{n-1}(x) dx.$$

– En écrivant $P_{n+1}(x) = (x - \alpha_n) P_n(x) - \lambda_n P_{n-1}(x)$, montrer par récurrence que P_n a la même parité que n et vérifie

$$\begin{cases} P_0(x) = 1, & P_1(x) = x, \\ P_{n+1}(x) = x P_n(x) - \frac{n^2}{(2n-1)(2n+1)} P_{n-1}(x). \end{cases}$$

Application. Calculer la meilleure approximation au sens des moindres carrés de la fonction $f(x) = x^4$ dans l'espace $\text{Vect}\{1, x, x^2\}$ muni de la norme usuelle de $L^2([-1, 1])$.

Exercice 5.4.4 (Polynômes de Tchebychev) Soit $n \geq 0$ un entier. Définissons le polynôme de Tchebychev⁴ de première espèce par $T_n(x) = \cos(n \arccos(x))$, pour tout $x \in [-1, 1]$.

Montrer que les fonctions $T_n(x)$ satisfont la formule de récurrence

$$\begin{cases} T_0(x) = 1, & T_1(x) = x, \\ T_{n+1}(x) = 2x T_n(x) - T_{n-1}(x). \end{cases}$$

⁴En référence au mathématicien russe Tchebychev (1821-1894). Il s'illustra pour ses travaux en probabilités et statistiques.

Montrer ensuite que les polynômes $T_n(x)$ sont orthogonaux pour le produit scalaire de $L^2_\omega([-1, 1])$ avec $\omega(x) = (1 - x^2)^{-1/2}$, c'est-à-dire

$$\int_{-1}^1 T_n(x) T_m(x) \frac{dx}{(1-x^2)^{1/2}} = \begin{cases} \pi & \text{si } n = m = 0, \\ \pi/2 & \text{si } n = m \neq 0, \\ 0 & \text{si } n \neq m. \end{cases}$$

Montrer que $T_n(x)$ est un polynôme de degré n dont le coefficient de x^n est 2^{n-1} .

Posons $y_k = \cos(k\pi/n)$, $k = 0, \dots, n$. Calculer $T_n(y_k)$ et les racines de T_n .

Soit $P_n(x)$ un polynôme de degré n considéré sur l'intervalle $[-1, 1]$ et dont le coefficient de x^n est 2^{n-1} . Montrer que

$$1 = \max_{x \in [-1, 1]} |T_n(x)| \leq \max_{x \in [-1, 1]} |P_n(x)|,$$

où T_n est le polynôme de Tchebychev dont le coefficient devant le terme x^n est 2^{n-1} .

Comment interpréter ce résultat ?

Exercice 5.4.5 (Les splines cubiques) Cet exercice a pour objet l'étude d'un procédé d'interpolation d'une fonction $f \in \mathcal{C}^2([a, b], \mathbb{R})$ par une fonction cubique par morceaux, appelé i spline cubique i . Soit $(x_i)_{0 \leq i \leq n+1}$ une partition de l'intervalle $[a, b]$ avec $x_0 = a$ et $x_{n+1} = b$. Nous appelons i spline cubique i une fonction S vérifiant les conditions suivantes :

(i) $S \in \mathcal{C}^2([a, b], \mathbb{R})$

(ii) $S|_{[x_i, x_{i+1}]}$ est un polynôme de degré trois pour $i = 0, \dots, n$.

Pour construire une telle approximation, nous cherchons à définir une spline S en fonction de ses valeurs aux points x_i mais aussi de sa dérivée seconde en x_i .

Sur un intervalle $[\alpha, \beta]$, montrer qu'il existe un unique polynôme P de degré inférieur ou égal à trois défini par ses valeurs $P(\alpha)$, $P(\beta)$, $P''(\alpha)$, $P''(\beta)$.

Déterminer ensuite les valeurs des dérivées premières en α et β en fonction des données.

En déduire qu'il existe une unique spline cubique S interpolant f au sens suivant :

$$\begin{cases} S(x_i) = f(x_i) & 0 \leq i \leq n+1 \\ S'(a) = f'(a), & S'(b) = f'(b). \end{cases} \quad (5.27)$$

En prenant pour $i \in \{0, \dots, n+1\}$ la fonction spline S_i telle que

$$S_i(x_j) = \begin{cases} 0 & \text{si } j \neq i \\ 1 & \text{si } j = i, \end{cases}$$

et $S'_i(a) = S'_i(b) = 0$. Puis les splines S_a et S_b telle que $S_\alpha(x_i) = 0$ pour $\alpha \in \{a, b\}$ et $S'_a(a) = S'_b(b) = 1$ et $S'_b(a) = S'_a(b) = 0$, montrer qu'une fonction spline S , interpolant f sur $[a, b]$ s'écrit

$$S(x) = \sum_{j=0}^{n+1} f_j S_j(x) + \sum_{\alpha \in \{a, b\}} f'_\alpha S_\alpha(x).$$