

Liste des Exercices :

Exercice 6.4.1 *Considérons le problème de Cauchy suivant : trouver $u \in \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R})$ telle que*

$$\begin{cases} u'(t) = -150u(t) + 30 \\ u(0) = 1 \end{cases}$$

Donner la solution exacte de cette équation. Écrire le schéma d'Euler explicite vérifié par $(v^n)_{n \in \mathbb{N}}$, correspondant à cette équation et trouver une relation de récurrence entre $v^{n+1} - 1/5$ et $v^n - 1/5$. En déduire la valeur de v^n . En prenant $\Delta t = 1/50$, calculer v^n et conclure.

Reprendre les mêmes questions pour le schéma d'Euler implicite.

Exercice 6.4.2 (Les schémas à un pas) *Soit $f : [0, T] \times \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{R}^d$ est une fonction continue et lipschitzienne en la seconde variable.*

Montrer que le schéma d'Euler implicite suivant est bien défini et est convergent d'ordre un

$$\begin{cases} v^{n+1} = v^n + \Delta t f(t^n + \Delta t, v^{n+1}), \\ v^0 = u_0. \end{cases}$$

Supposons de plus que $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$. Montrer que le schéma suivant est convergent et d'ordre deux

$$\begin{cases} v^{n+1/2} = v^n + \frac{\Delta t}{2} f(t^n, v^n), \\ v^{n+1} = v^n + \Delta t f\left(t^n + \frac{\Delta t}{2}, v^{n+1/2}\right), \\ v^0 = u_0. \end{cases} \quad (6.21)$$

Application. *Soit l'équation différentielle ($k > 0$)*

$$y' + ky^2 = 0, \quad y(0) = 1.$$

- Résoudre cette équation différentielle. Quelle est sa limite en $t \rightarrow \infty$?
- Écrire le schéma d'Euler explicite pour une approximation z^n de $y(t^n)$ et étudier le comportement de $(z^n)_{n \in \mathbb{N}}$ lorsque n tend vers l'infini.
- Considérons le schéma

$$\frac{z^{n+1} - z^n}{\Delta t} + k \left(\frac{z^{n+1} + z^n}{2} \right)^2 = 0.$$

Calculer la solution z^{n+1} en fonction de z^n , k et Δt et en déduire une condition sur Δt pour que le comportement de la solution numérique soit correct lorsque $n \rightarrow \infty$. Montrer que le schéma est consistant d'ordre deux.

Exercice 6.4.3 (Les schémas de type Runge-Kutta) Considérons $b_1, b_2, c, a \in \mathbb{R}$ avec $0 \leq c_1 \leq c_2 \leq 1$. Puis nous introduisons le point intermédiaire $t^{n,2} = t^n + c \Delta t$ et la valeur intermédiaire $v^{n,2} = v^n + \Delta t a f(t^n, v^n)$

Le schéma de Runge-Kutta explicite à deux points étages s'écrit alors

$$\begin{cases} v^{n+1} = v^n + \Delta t (b_1 f(t^n, v^n) + b_2 f(t^{n,2}, v^{n,2})), \\ u^0 = u_0. \end{cases}$$

Quelles valeurs des coefficients b_1, b_2, a et c faut-il choisir pour avoir un schéma d'ordre un et deux ?

Le schéma d'Euler modifié (6.21) entre-t-il dans ce cadre ?

Exercice 6.4.4 (Les systèmes hamiltoniens) Intéressons-nous au système hamiltonien suivant

$$\begin{cases} p'(t) = -\nabla U(q(t)) \\ q'(t) = +\nabla T(p), \end{cases}$$

où U et T sont des fonctions $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$. De plus, ∇U et ∇T sont lipschitziennes.

Nous proposons le schéma suivant : d'abord $(p^0, q^0) = (p_0, q_0) \in \mathbb{R}^{2d}$ donné et

$$\begin{cases} p^{n+1} - p^n = -\Delta t \nabla U(q^n) \\ q^{n+1} - q^n = +\Delta t \nabla T(p^{n+1}) \end{cases}$$

Montrer que ce schéma peut s'écrire comme un schéma à un pas du type

$$v^{n+1} = v^n + \Delta t \phi(t^n, v^n, \Delta t)$$

avec $v^n = (p^n, q^n)$. Expliciter la fonction ϕ .

Montrer que ce schéma est convergent.

Appliquer ce schéma au problème du pendule $x'' = -\sin(x)$.