Université Claude Bernard, Lyon I
43, boulevard 11 novembre 1918
69622 Villeurbanne cedex, France

Licence Sciences & Technologies
Spécialité Mathématiques
Option: Analyse Numérique 2007-2008

Travaux Pratiques numéro 3 :

1 Notion de conditionnement

1.1 Conditionnement

Résoudre à l'aide des commandes “boîte noire” de Matlab (sans passer par l'inverse de la matrice) les systèmes linéaires

$$\begin{pmatrix} 10 & 7 & 8 & 7 \\ 7 & 5 & 6 & 5 \\ 8 & 6 & 10 & 9 \\ 7 & 5 & 9 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 32 \\ 23 \\ 33 \\ 31 \end{pmatrix}$$

et

$$\begin{pmatrix} 10 & 7 & 8 & 7 \\ 7 & 5 & 6 & 5 \\ 8 & 6 & 10 & 9 \\ 7 & 5 & 9 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \\ x'_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 32.1 \\ 22.9 \\ 33.1 \\ 30.9 \end{pmatrix}$$

Comment analysez-vous ce résultat ?

1.2 Approximation du Laplacien

Ensuite, on considère la matrice $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ telle que

$$a_{i,i} = 2, \quad a_{i,i+1} = -1, \quad a_{i,i-1} = -1,$$

On construit la matrice de taille n $A_h = \frac{1}{h^2} A$ avec $h = 1/(n+1)$.

- Montrer “à la main” que A_h est inversible, calculer ses vecteurs propres et valeurs propres. Calculer $cond_2(A)$.
- Calculer à l'aide de `Matlab` le conditionnement (en norme 2) de la matrice de cette question.
- Tracer la courbe du conditionnement (en norme 2) de A_h en fonction de h. Cela vous semble-t-il cohérent avec les résultats théoriques?

1.3 Matrice de Hilbert

On considère maintenant la matrice $H = (h_{i,j})$ (dite de Hilbert telle que

$$h_{i,j} = 1/i + j - 1, \quad i, j = 1, \ldots, n.$$

- Tracer la courbe du conditionnement (en norme 2) de H en fonction de n.
- Résoudre le système linéaire $Hx = b$ dont la solution exacte est le vecteur de composantes toutes égales à 1 et $b = Hx$, par la méthode de la factorisation LU (méthode de Gauss).
- Tracer la courbe de l'erreur relative en fonction de n.

2 Méthodes itératives

On considère A une matrice inversible telle que $A = D - (E + F)$ avec D la diagonale de A, dont on suppose qu'elle est inversible, E triangulaire inférieure, F triangulaire supérieure.

- La méthode de Jacobi est basée sur le shéma

  $$Du^{(k+1)} = (E + F)u^{(k)} + b$$

  ce qui donne $B = B_J = D^{-1}(E + F)$ et $c = D^{-1}b$.

- La méthode de Gauss-Seidel est basée sur le shéma

  $$Du^{(k+1)} = Eu^{(k+1)} + Fu^{(k)} + b$$

  ce qui donne $B = B_G = (D - E)^{-1}F$ et $c = (D - E)^{-1}b$.

- Calculer le rayon spectral des matrices B_J, B_G pour $A = A_h$.

- Programmer les deux méthodes itératives. Comparer leur vitesse de convergence sur différents systèmes linéaires de taille très différentes (jusqu'à $n = 100$). Commenter.

- Tracer l'évolution de l'erreur d'approximation en fonction du nombre d'itérés dans le cas où on résout avec $A_h\, x_0 = b$ le système $b = A_h\, x_0$ (x_0 est le vecteur de composantes toutes égales à 1). Que peut-on dire de $\log(\rho(D^{-1}A_h))$?