Université Claude Bernard Lyon 1 UE Analyse I
Licence STS Math-Info - 1ère année Printemps 2012

CONTRÔLE CONTINU NUMÉRO 1 – 19 mars 2012

Réglement – L'épreuve dure 45 minutes. Les documents et les calculatrices ne sont pas autorisés. Les téléphones portables doivent être éteints.

Entre crochets [ ] est indiqué le barème sur 20 points.

Exercice 1. [2 pts] – Demontrer (par l'absurde) que $\sqrt{2}$ n'est pas un nombre rationnel.

Exercice 2. [4 pt]

a) Soit x un nombre réel quelconque. Donner la définition de la partie entière de x, notée $E(x)$, et de la partie fractionaire de x, notée $[x]$.

b) Montrer qu'il existe un $N > 0$ tel que

$$x - N < E(x) \leq x \qquad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

c) En utilisant b), montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0, 1$ on a

$$\left(\frac{E(x)}{x}\right)^2 \leq \frac{E(x)}{x} \quad \text{et} \quad \left(\frac{E(x)}{x-1}\right)^2 > \frac{E(x)}{x-1}.$$

d) Soit $x = \frac{n}{m}$ un nombre rationnel, avec n entier quelconque et m entier positif non nul. Soient q et r respectivement le quotient et le reste de la division euclidienne de n par m, i.e. $n = qm + r$ avec $0 \leq r < m$.
Montrer alors que $E(x) = q$ et $[x] = \frac{r}{m}$.

Exercice 3. [4 pts]

a) Donner la définition de sous-ensemble borné de $\mathbb{R}$.

b) Soit A un sous-ensemble non vide de $\mathbb{R}$. Donner la définition de la borne supérieur de A, notée $\sup A$.

c) Soit A un sous-ensemble non vide et borné de $\mathbb{R}$. Montrer (par l'absurde) que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un $a \in A$ tel que

$$\sup A < a + \varepsilon.$$

Exercice 4. [10 pts] – Exprimer les ensembles suivants comme intervalles ou union d'intervalles de $\mathbb{R}$. Pour chaque ensemble, trouver la borne supérieur, la borne inférieur et, s'ils existent, le maximum et le minimum.

$$A = \left\{ \frac{1}{x} \mid x \in [-1, 1] \ , \ x \neq 0 \right\}$$

$$B = \left\{ \frac{1}{|x|} \mid x \in [-1, 1] \ , \ x \neq 0 \right\}$$

$$C = \left\{ \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \mid x \in]-1, 1[\right\}$$

$$D = \left\{ \frac{1}{\ln(1 - x^2)} \mid x \in [-1, 1] \ , \ x \neq 0 \right\}$$

$$E = \left\{ x \in]0, +\infty[\mid e^{x^2} \leq 2 \right\}$$