Analyse I – Corrigé du CC2 du 7 mai 2012 – A. Frabetti

Exercice 1 : $\alpha \in \mathbb{N}$, $\alpha \neq 0$

- $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^\alpha} = 0 \overset{\text{déf.}}{\iff} \forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N}$ t.q. $\forall n \geq N$ on a $\left|\frac{1}{n^\alpha} - 0\right| < \varepsilon$.
- Fixons $\varepsilon > 0$. Pour $n > 0$ et $\alpha > 0$ on a $n^\alpha > 0$, donc $\left|\frac{1}{n^\alpha} - 0\right| = \frac{1}{n^\alpha} < \varepsilon \iff \frac{1}{\varepsilon} < n^\alpha$ $\iff n > \frac{1}{\sqrt[\alpha]{\varepsilon}}$.
- Soit $N := \left[\frac{1}{\sqrt[\alpha]{\varepsilon}}\right] + 1$. Alors $N > \frac{1}{\sqrt[\alpha]{\varepsilon}}$ et donc :

$\forall n \geq N$ on a $n > \frac{1}{\sqrt[\alpha]{\varepsilon}}$ et donc $\frac{1}{n^\alpha} < \varepsilon \implies \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^\alpha} = 0$. ■

Exercice 2 :

a) $$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2+n+3}{n^3+4} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n^2}(2+1/n+3/n^2)}{\cancel{n^3}_{\,n}(1+4/n^3)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \cdot \frac{\lim_{n\to\infty}(2+1/n+3/n^2)}{\lim_{n\to\infty}(1+4/n^3)} =$$

$$= 0 \cdot \frac{2+0+0}{1+0} = 0 \cdot 2 = 0, \text{ car } \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty}\frac{3}{n^2} = \lim_{n\to\infty}\frac{4}{n^3} = 0.$$

b) $$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2+n+3}{n^2+4} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n^2}(2+1/n+3/n^2)}{\cancel{n^2}(1+4/n^2)} = \frac{\lim_{n\to\infty}(2+1/n+3/n^2)}{\lim_{n\to\infty}(1+4/n^2)} = \frac{2+0+0}{1+0} = 2.$$

c) $u_n = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{2012}\right)^k$ est une suite géométrique $u_n = \sum_{k=0}^{n} q^k$ avec $u_0 = 1$ et $q = \frac{1}{2012}$.

On sait qu'une telle suite converge à $\frac{1}{1-q}$ si $|q| < 1$.

Puisque $0 < q = \frac{1}{2012} < 1$, on a $\lim_{n\to\infty} u_n = \frac{1}{1-\frac{1}{2012}} = \frac{2012}{2012-1} = \frac{2012}{2011}$.

Exercice 3 :

a) Une suite réelle (u_n) est de Cauchy si $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N}$ t.q. $\forall p, q \geq N$ on a $|u_p - u_q| < \varepsilon$.

Rem : il suffit que $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N}$ t.q. $\forall n \geq N$ on a $|u_{n+1} - u_n| < \varepsilon$.

b) Critère de convergence de Cauchy : une suite réelle converge si et seulement si elle est de Cauchy.

c) $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > 1$, $u_n = \sum_{i=0}^{n} \frac{\cos i}{\alpha^i}$. Montrons que (u_n) est de Cauchy.

- Fixons $\varepsilon > 0$ et supposons $p < q$. Puisque $|\cos i| \leq 1 \ \forall i \in \mathbb{N}$, on a :

$$|u_q - u_p| = \left|\sum_{i=0}^{q} \frac{\cos i}{\alpha^i} - \sum_{i=0}^{p} \frac{\cos i}{\alpha^i}\right| = \left|\sum_{i=p+1}^{q} \frac{\cos i}{\alpha^i}\right| \leq \sum_{i=p+1}^{q} \frac{|\cos i|}{\alpha^i} \leq \sum_{i=p+1}^{q} \frac{1}{\alpha^i} =$$

$$= \sum_{i=p+1}^{q} \left(\frac{1}{\alpha}\right)^i = |v_q - v_p| \text{ où } v_n = \sum_{i=0}^{n} \left(\frac{1}{\alpha}\right)^i \text{ est une suite}$$

géométrique de raison $q = \frac{1}{\alpha}$ t.q. $|q| = \left|\frac{1}{\alpha}\right| < 1$ car $\alpha > 1$.

- Puisque (v_n) converge (à $\frac{1}{1-q}$), elle est de Cauchy : $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N}$ t.q. $\forall p, q \geq N$ on a $|v_q - v_p| < \varepsilon$. Pour le $\varepsilon > 0$ fixé au départ, et pour cet $N \in \mathbb{N}$ on a donc : $\forall p, q \geq N$: $|u_q - u_p| \leq |v_q - v_p| < \varepsilon$. La suite (u_n) est donc de Cauchy et par conséquent elle converge. ■