Université Claude Bernard Lyon 1 — UE Analyse I - Printemps 2012
Licence Math-Info 1ère année — http ://math.univ-lyon1.fr/~frabetti/AnalyseI/

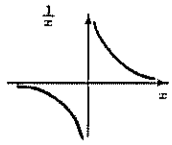
Fonctions réelles usuelles

1 Fonctions, fonctions bijectives, fonctions monotones

<u>Fonction réelle :</u> Une **fonction réelle d'une variable réelle** est une loi (application) f qui associe à un nombre réel x <u>un et un seul</u> nombre réel $f(x)$. On appelle $f(x)$ l'**image** de x et x l'**antécedent** de $f(x)$. La fonction est notée $f : x \mapsto f(x)$.

- Le **domaine** de f est le sous-ensemble maximale de $\mathbb{R}$, noté D_f, contenant les $x \in \mathbb{R}$ tels que $f(x)$ soit un nombre réel, i.e. $D_f := \{x \in \mathbb{R} \mid \exists f(x) \in \mathbb{R}\}$. On note alors $f : D_f \longrightarrow \mathbb{R}, x \mapsto f(x)$.
- L'**image** de f est le sous-ensemble de $\mathbb{R}$, noté I_f ou $f(D_f)$, contenant les valeurs $y = f(x)$ pour tous les $x \in D_f$, i.e. $I_f = f(D_f) := \{y \in \mathbb{R} \mid \exists x \in D_f \text{ t.q. } f(x) = y\}$. On peut alors noter aussi $f : D_f \longrightarrow I_f, x \mapsto f(x)$.
- Le **graphe** de f est le sous-ensemble $\Gamma_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in D_f,\ y = f(x)\ \}$ de $\mathbb{R}^2$. Le graphe d'une fonction est une courbe du plan caracterisée par le fait qu'à tout valeur $x \in D_f$ correspond <u>un et un seul</u> point $(x, f(x))$ de la courbe.

<u>Exemple :</u> $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $D_f = \mathbb{R}^*$, $I_f = \mathbb{R}^*$,



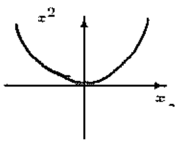
<u>Restriction d'une fonction :</u> Soit f une fonction de domaine D_f, pour tout sous-ensemble $D \subset D_f$ on appelle **restriction de f à D** la fonction $x \mapsto f(x)$ définie seulement pour $x \in D$. La restriction est notée $f : D \longrightarrow \mathbb{R}, x \mapsto f(x)$.

- Si $D \subset D_f$, l'**image de D par** f est l'ensemble $f(D) := \{y = f(x) \in I_f \mid x \in D\} \subset I_f$. On a alors une restriction $f : D \longrightarrow f(D), x \mapsto f(x)$.
- Si $I \subset I_f$, l'**antécedent de I par** f est l'ensemble $f^{-1}(I) := \{x \in D_f \mid f(x) \in I\} \subset D_f$. On a alors une restriction $f : f^{-1}(I) \longrightarrow I, x \mapsto f(x)$.

<u>Exemple :</u> La fonction $f :]0, +\infty[\longrightarrow]0, +\infty[\ ,\ x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est une restriction de la fonction $f(x) = \dfrac{1}{x}$ définie sur $\mathbb{R}^*$.

<u>Fonction injective, surjective et bijective :</u> Une fonction f s'appelle

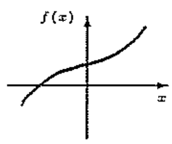
1. **injective** si tout $y \in I_f$ a <u>un seul</u> antécedent $x \in D_f$. Autrement dit, si pour tout $x_1, x_2 \in D_f$ on a $f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2$, ce qui est équivalent à $x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2)$.
2. **surjective sur** $I \subset \mathbb{R}$ si tout $y \in I$ admet <u>au moins un</u> antécedent $x \in D_f$. Autrement dit, si $I \subset I_f$.
3. **bijective sur** $I \subset \mathbb{R}$, ou on dit que f est une **bijection**, si elle est injective et surjective sur I. Autrement dit, si tout $y \in I$ admet <u>exactement un</u> antécedent $x \in D_f$.

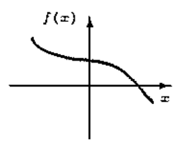


<u>Exemple :</u> La fonction $f(x) = x^2$ a domaine $D_f = \mathbb{R}$ et image $I_f = \mathbb{R}^+$. Elle n'est pas injective, elle n'est pas surjective sur $\mathbb{R}$ mais elle est surjective sur son image $\mathbb{R}^+$.
Sa restriction à $D = \mathbb{R}^+$ est injective et surjective sur $\mathbb{R}^+$, donc c'est une bijection.

<u>Fonction (strictement) monotone :</u> Une fonction f s'appelle

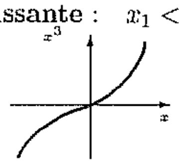
1. **monotone** si elle est
   - **croissante** : $x_1 \leq x_2 \implies f(x_1) \leq f(x_2)$,
   - ou **décroissante** : $x_1 \leq x_2 \implies f(x_1) \geq f(x_2)$.





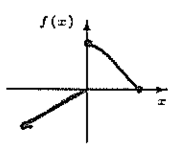
2. **strictement monotone** si elle est
   - **strictement croissante** : $x_1 < x_2 \implies f(x_1) < f(x_2)$,
   - ou **strictement décroissante** : $x_1 < x_2 \implies f(x_1) > f(x_2)$.

<u>Exemples :</u> $x \mapsto x^2$ n'est pas monotone,
$x \mapsto x^3$ est strictement monotone (croissante),
$x \mapsto \frac{1}{x}$ est strictement monotone (decroissante).



<u>Proposition :</u> Une fonction strictement monotone est injective. Donc elle est bijective sur son image.

Preuve : En effet, soit f une fonction strictement monotone et supposons que $x_1 \neq x_2$. Alors soit $x_1 < x_2$ soit $x_2 < x_1$. Si $x_1 < x_2$, puisque f est strictement monotone on a $f(x_1) < f(x_2)$ ou bien $f(x_1) > f(x_2)$: dans les deux cas on a $f(x_1) \neq f(x_2)$, et donc f est injective. Si $x_2 < x_1$ le raisonnement est le même. $\square$



Le contraire n'est pas vrai : une fonction injective n'est pas forcement monotone. Par exemple

2 Opérations entre fonctions

Soient f et g deux fonctions réelles, de domaine D_f et D_g. Alors on pose :

Egalité : $f = g$ si et seulement si $D_f = D_g \equiv D$ et $f(x) = g(x)$ pour tout $x \in D$.

Opérations d'addition et soustraction :

- **somme** : $f+g$ est la fonction définie par $(f+g)(x) := f(x)+g(x)$, pour tout $x \in D_f \cap D_g$. Donc $D_{f+g} = D_f \cap D_g$.
- **zéro** : 0 est la fonction définie par $0(x) := 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Donc $D_0 = \mathbb{R}$. On a : $f+0 = 0+f = f$, $\forall f$.
- **opposée** : $-f$ est la fonction définie par $(-f)(x) := -f(x)$ pour tout $x \in D_f$. Donc $D_{-f} = D_f$.
  On a : $f + (-f) = (-f) + f = 0$, $\forall f$.
- **difference** : $f-g$ est la fonction définie par $(f-g)(x) := f(x)-g(x)$, pour tout $x \in D_f \cap D_g$. Donc $D_{f-g} = D_f \cap D_g$.

Opérations de multiplication et division :

- **produit** : $f \cdot g$ est la fonction définie par $(f \cdot g)(x) := f(x) \cdot g(x)$, pour tout $x \in D_f \cap D_g$. Donc $D_{f \cdot g} = D_f \cap D_g$.
- **unité** : 1 est la fonction définie par $1(x) := 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Donc $D_1 = \mathbb{R}$. On a : $f \cdot 1 = 1 \cdot f = f$, $\forall f$.
- **inverse** : $\dfrac{1}{f}$ est la fonction définie par $\left(\dfrac{1}{f}\right)(x) := \dfrac{1}{f(x)}$, pour tout $x \in D_f$ tel que $f(x) \neq 0$. Donc $D_{1/f} = \{x \in D_f, f(x) \neq 0\}$. On a : $f \cdot \frac{1}{f} = \frac{1}{f} \cdot f = 1$, $\forall f \neq 0$.
- **quotient** : $\dfrac{f}{g}$ est la fonction définie par $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) := \dfrac{f(x)}{g(x)}$, pour tout $x \in D_f \cap D_g$ tel que $g(x) \neq 0$. Donc $D_{f/g} = \{x \in D_f \cap D_g, g(x) \neq 0\}$.

Opérations de composition et inversion :

- **composée** : $f \circ g$ est la fonction définie par $(f \circ g)(x) := f(g(x))$, pour tout $x \in D_g$ tel que $g(x) \in D_f$. Donc $D_{f \circ g} = \{x \in D_g, g(x) \in D_f\}$. La fonction composée $f \circ g$ peut être visualisée comme l'application d'abord de la fonction $g : D_g \longrightarrow I_g, x \mapsto g(x)$ et ensuite de la fonction $f : I_g \cap D_f \longrightarrow I_f, y = g(x) \mapsto f(y) = f(g(x))$.
- **identité** : id est la fonction définie par $\mathrm{id}(x) := x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Donc $D_{\mathrm{id}} = \mathbb{R}$. On a : $f \circ \mathrm{id} = \mathrm{id} \circ f = f$, $\forall f$.
- **réciproque** : si $f : D \longrightarrow I$, la réciproque est la fonction $f^{-1} : I \longrightarrow D$ définie par $f^{-1}(y) = x$ tel que $y = f(x)$, pour tout $y \in I$ ayant un seul antécédent $x \in D_f$.
  Si f^{-1} existe, on a : $f^{-1} \circ f = \mathrm{id} = f \circ f^{-1}$, i.e. $f^{-1}\big(f(x)\big) = x$ pour tout $x \in D$ et $f\big(f^{-1}(y)\big) = y$ pour tout $y \in I$.

Exemples :

1. La fonction $h(x) = x^2 + \sin x$ est la somme des deux fonctions $f(x) = x^2$ et $g(x) = \sin x$.
2. La fonction $h(x) = \dfrac{1}{x^4}$ est l'inverse de la fonction $f(x) = x^4$.
3. La fonction $h(x) = \sin(x^3 - 2)$ est la composée de $g(x) = x^3 - 2$ et $f(y) = \sin y$.

Proposition : La réciproque $f^{-1} : I \longrightarrow D$ existe si et seulement si $f : D \longrightarrow I$ est bijective.

Preuve : Si f est bijective, alors tout $y \in I$ a un seul antécédent x, donc la loi $y \mapsto x$ est bien une fonction sur I.
Si f n'est pas surjective, pour un $y \in I$ n'ayant pas d'antécédent on ne peut définir le correspondant de y et f^{-1} n'est pas définie sur I.
Si f n'est pas injective, alors il y a au moins une valeur $y \in I$ ayant deux antécédents différents $x_1 \neq x_2$. Dans ce cas, la réciproque devrait être définie en y par $f^{-1}(y) = x_1$ et aussi par $f^{-1}(y) = x_2$, et donc ce n'est pas une fonction. □

Astuce : si $f : D \longrightarrow I$ est surjective mais pas injective, on peut définir la réciproque d'une restriction de f qui soit bijective sur la même image I. Par exemple, si la restriction $f : D' \longrightarrow I = f(D')$ est bijective, avec $D' \subset D$, on définie la réciproque $f^{-1} : I \longrightarrow D'$ par $f^{-1}(y) = x \iff x \in D'$ et $y = f(x) \in I$.

Proprietés des opérations entre fonctions :

1. Les opérations d'addition et multiplication entre fonctions sont commutative, associative, ont l'élément neutre et satisfont à la distributivité. De plus, toute fonction admet une opposée et toute fonction différente de la fonction nulle admet l'inverse. Donc l'ensemble des fonctions réelles est un corps commutatif.
2. La composition est associative et la fonction identité en est l'element neutre, mais toute fonction n'a pas forcement une réciproque. Donc l'ensemble des fonctions réelles n'est pas un groupe avec la composition.
3. Par contre, toute fonction bijective a la réciproque, donc l'ensemble des fonctions réelles bijectives (de même domaine et image) est un groupe avec la composition. Puisque la composition n'est pas commutative (i.e. $f \circ g \neq g \circ f$), le groupe est non Abélien.

3 Fonctions polynômiales

<u>Définition :</u> Une **fonction polynômiale** est une fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par la valeur $f(x) = P(x)$ d'un polynôme $P(X)$ où la variable X est remplacée par le nombre réel x. Le domaine d'une fonction polynômiale est $\mathbb{R}$.

<u>**Puissances parfaites :**</u>

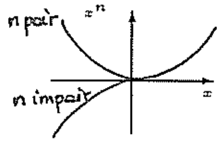
$$\begin{aligned}
(x-a)^2 &= x^2 - 2ax + a^2 \\
(x-a)^3 &= x^3 - 3ax^2 + 3a^2x - a^3 \\
(x-a)^4 &= x^4 - 4ax^3 + 6a^2x^2 - 4a^3x + a^4 \\
(x-a)^n &= x^n - nx^{n-1}a + \cdots + (-1)^k \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} x^{n-k}a^k + \cdots + (-1)^n a^n
\end{aligned}$$

<u>**Factorisation des differences :**</u>

$$\begin{aligned}
x^2 - a^2 &= (x-a)(x+a) \\
x^3 - a^3 &= (x-a)(x^2 + ax + a^2) \\
x^4 - a^4 &= (x-a)(x^3 + ax^2 + a^2x + a^3) \\
x^n - a^n &= (x-a)(x^{n-1} + ax^{n-2} + \cdots + a^{n-2}x + a^{n-1}).
\end{aligned}$$

<u>**Exemples :**</u>

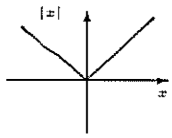
1. La **fonction constante** $f(x) = 7$, et les fonctions $g(x) = x^5 + x^3 + 1$ et $h(x) = x^{10001} + 1001$ sont polynômiales.
2. Les fonctions $f(x) = x^5 + \sqrt{x}$ et $g(x) = x^5 + \dfrac{3}{x}$ <u>ne sont pas polynômiales.</u>



<u>**Puissances entières :**</u> Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $f(x) = x^n$ s'appelle **puissance n-ième**. Son domaine est donc $D = \mathbb{R}$ et son image est $I = \mathbb{R}^+$ si n est pair, et $I = \mathbb{R}$ si n est impair.

<u>**Proprietés des puissances entières :**</u> pour tout $x, y \in \mathbb{R}$ et pour tout $n, m \in \mathbb{N}$ on a

$$x^0 = 1, \qquad x^1 = x, \qquad x^n y^n = (xy)^n, \qquad x^n x^m = x^{n+m}, \qquad (x^n)^m = x^{nm}.$$



<u>**Valeur absolue :**</u> La **valeur absolue** est la fonction $|\ \ | : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$, définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par

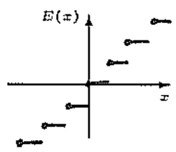
$$|x| := \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

<u>**Proprietés de la valeur absolue :**</u> pour tout $x, y \in \mathbb{R}$ on a :

$$|x| \geq 0 \quad \text{et} \quad |x| = 0 \Leftrightarrow x = 0, \qquad |x+y| \leq |x| + |y| \quad \textbf{(inégalité triangulaire)}, \qquad |x \cdot y| = |x| \cdot |y|.$$

<u>**Partie entière :**</u> La **partie entière** est la fonction $E : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{Z}$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ comme le plus grand entier $E(x)$ qui soit inférieur ou egal à x, c'est-à-dire

$$E(x) := \max\{n \in \mathbb{Z} \mid n \leq x\} = \text{ unique nombre entier tel que } E(x) \leq x < E(x) + 1.$$



La partie entière est une fonction à escalier, localement constante.

4 Fractions rationelles

<u>**Définition :**</u> Une **fraction rationelle** est le quotient de deux fonctions polynômiales, c'est-à-dire une fonction de la forme $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$, où P et Q sont deux polynômes à coeffiecients réels. Cette fonction est définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ tel que $Q(x) \neq 0$, donc son domaine est $D = \{x \in \mathbb{R} \text{ t.q. } \ Q(x) \neq 0\}$.

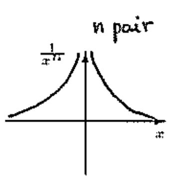
<u>**Exemples :**</u>

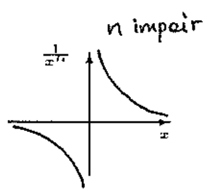
1. Les fonctions $f(x) = \dfrac{1}{x^3 + 3x + 1}$, $g(x) = \dfrac{x^5 + x^3 + 1}{x^2 + 2}$, et $h(x) = x^5 + \dfrac{3}{x}$ sont des fractions rationelles.
2. Les fonctions $f(x) = x^5 + \sqrt{x}$ et $g(x) = \dfrac{1}{x^5} + \sqrt{x}$ <u>ne sont pas des fractions rationelles.</u>

<u>**Inverse d'une puissance entière :**</u> Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction inverse de la puissance n-ième est la fraction rationelle

$$f(x) = \frac{1}{x^n} \equiv x^{-n}.$$

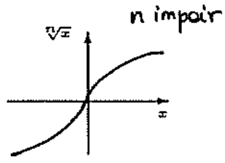
Son domaine est $D = \mathbb{R}^*$, son image est $I = \mathbb{R}^*_+$ si n est pair et $I = \mathbb{R}^*$ si n est impair.



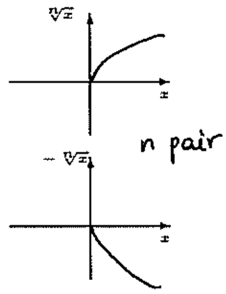


5 Réciproques des puissances n-ièmes : les racines n-ièmes

Définition : Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Si n est *impair*, la puissance n-ième $x \mapsto x^n$ est une fonction bijective, avec domaine $D = \mathbb{R}$ et image $I = \mathbb{R}$. On appelle **racine n-ième** sa réciproque, c'est-à-dire la fonction $\sqrt[n]{\ } : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : y \mapsto \sqrt[n]{y}$ définie par la proprieté
$$\sqrt[n]{y} = x \iff y = x^n \quad \text{pour tout } x, y \in \mathbb{R}.$$


Par conséquence, on a aussi :
$$\sqrt[n]{x^n} = x \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad \left(\sqrt[n]{y}\right)^n = y \quad \text{pour tout } y \in \mathbb{R}.$$

2. Si n est *pair*, la puissance n-ième $D = \mathbb{R} \longrightarrow I = \mathbb{R}^+ : x \mapsto x^n$ n'est pas bijective, donc sa réciproque n'existe pas, en tant que fonction $I = \mathbb{R}^+ \longrightarrow D = \mathbb{R}$. Toutefois, on peut rendre cette fonction bijective de deux façons, qui donnent lieu à deux differents choix de sa réciproque.
   (a) Si on considère la puissance n-ième $x \mapsto x^n$ restreine au domaine $D = \mathbb{R}^+$, on obtient une fonction bijective strictement croissante avec image $I = \mathbb{R}^+$. On appelle **racine n-ième** sa réciproque, c'est-à-dire la fonction $\sqrt[n]{\ } : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ telle que
$$\sqrt[n]{y} = x \iff y = x^n \quad \text{avec } x, y \in \mathbb{R}^+.$$


   Par conséquence on a aussi :
$$\sqrt[n]{x^n} = x \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}^+ \quad \text{et} \quad \left(\sqrt[n]{y}\right)^n = y \quad \text{pour tout } y \in \mathbb{R}^+.$$
   (b) Si, par contre, on considère la puissance n-ième $x \mapsto x^n$ restreine au domaine $D = \mathbb{R}^-$, on obtient une fonction bijective strictement décroissante avec image $I = \mathbb{R}^+$. Sa réciproque est la fonction $-\sqrt[n]{\ } : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^-$ qui est exactement l'opposée de la racine n-ième $\sqrt[n]{\ }$ à image dans $\mathbb{R}^+$.

   En conclusion, pour la puissance n-ième avec n pair, on parle de sa réciproque $\pm\sqrt[n]{\ } : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^\pm$ avec le sous-entendu qu'il s'agit là de *deux* fonctions distinctes, avec differentes images.
   Les racines n-ièmes pour n pair ont donc les proprietés suivantes :
$$\sqrt[n]{x^n} = |x| \in \mathbb{R}^+ \qquad \text{et} \qquad -\sqrt[n]{x^n} = -|x| \in \mathbb{R}^-, \qquad \text{pour tout } x \in \mathbb{R} \text{ (avec } x^n \in \mathbb{R}^+ \text{ puisque } n \text{ est pair).}$$

Proprietés des racines : Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et pour tout x et y dans le domaine de définition de la racine considerée, on a :
$$\sqrt[1]{x} = x, \qquad \sqrt[n]{x}\,\sqrt[n]{y} = \sqrt[n]{xy}, \qquad \sqrt[n]{x}\,\sqrt[m]{x} = \sqrt[nm]{x^{n+m}}, \qquad \sqrt[m]{\sqrt[n]{x}} = \sqrt[nm]{x}.$$

Remarque : Les proprietés des racines sont une extention des proprietés des *puissances entières* au cas des *puissance fractionaires*. À cause de ça, on denote la racine n-ième aussi par le symbol
$$x^{\frac{1}{n}} := \sqrt[n]{x}.$$
Cette notation est très pratique, et permet de reécrire comme suit les identités qui définissent la racine comme réciproque de la puissance entière :
$$\sqrt[n]{x^n} = (x^n)^{\frac{1}{n}} = x^{n\frac{1}{n}} = x^1 = x, \qquad \text{et} \qquad \left(\sqrt[n]{y}\right)^n = \left(y^{\frac{1}{n}}\right)^n = y^{\frac{1}{n}n} = y^1 = y.$$

Exemples :

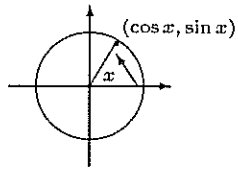
1. Les fonctions $f(x) = \sqrt[3]{x^5+1}$, $g(x) = \sqrt{|\sin x|}$ et $h(x) = \operatorname{ch}\left(\sqrt[5]{x}\right)$ sont des fonctions composées de racines et d'autres fonctions (polynomiales, circulaire ou hyperboliques).
2. La fonction $f(x) = -\sqrt{x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1}$ semble la racine d'un polynôme (et bien sur elle l'est), mais elle est aussi une fonction polynomiale, car
$$f(x) = -\sqrt{x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1} = -\sqrt{(x-1)^4} = -(x-1)^2 = -x^2 + 2x - 1.$$
   De même, la fonction $g(x) = \sqrt{e^{2x}}$ semble la racine d'un exponentiel, mais en fait il s'agit d'un exponentiel tout court, car
$$g(x) = \sqrt{e^{2x}} = \left(e^{2x}\right)^{\frac{1}{2}} = e^x.$$

6 Fonctions circulaires

__Définition :__ les **fonctions trigonométriques** ou **fonctions circulaires** sont les quatre fonctions suivantes :

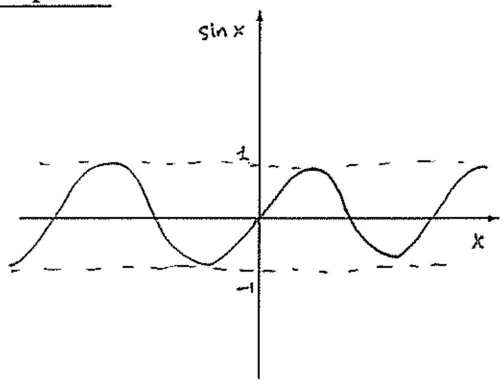
1. **cosinus** $x \mapsto \cos x$ $\quad D = \mathbb{R}$
2. **sinus** $x \mapsto \sin x$ $\quad I = [-1, 1]$

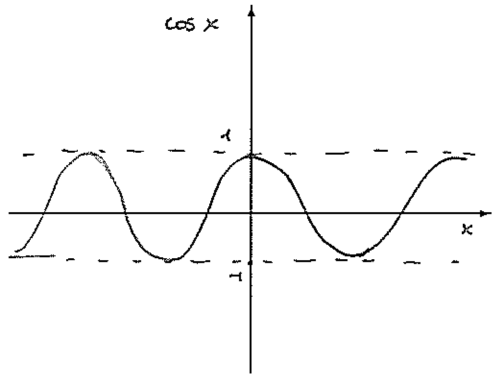
tels que $(\cos x, \sin x)$ soient les coordonnées cartésiennes du point du cercle de rayon 1 à angle x :

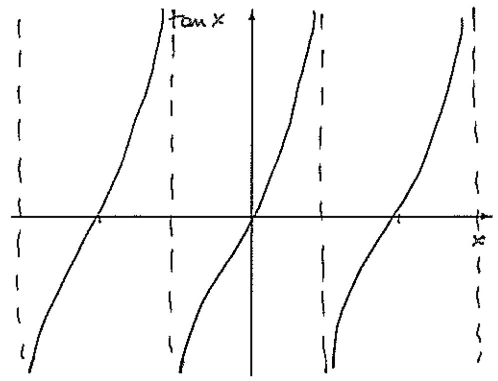


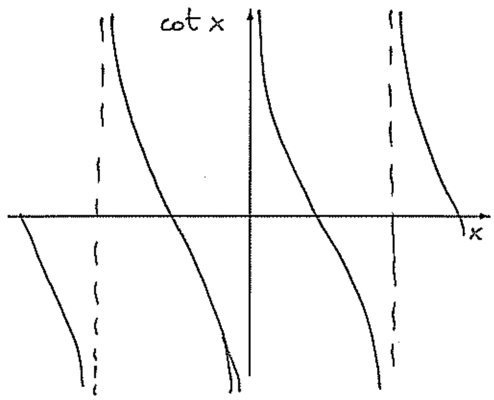
3. **tangente** $x \mapsto \tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ $\quad D = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left] -\dfrac{\pi}{2} + k\pi, \dfrac{\pi}{2} + k\pi \right[,$ $\quad I = \mathbb{R}.$
4. **cotangente** $x \mapsto \cot x = \dfrac{\cos x}{\sin x} = \dfrac{1}{\tan x}$ $\quad D = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left] k\pi, (k+1)\pi \right[,$ $\quad I = \mathbb{R}.$

__Graphes :__









__Valeurs particulières :__

$\cos(0) = 1,$	$\sin(0) = 0,$	$\tan(0) = 0,$	$\cot(0) = \pm\infty$
$\cos(\pi/6) = \sqrt{3}/2,$	$\sin(\pi/6) = 1/2,$	$\tan(\pi/6) = \sqrt{3}/3,$	$\cot(\pi/6) = \sqrt{3}$
$\cos(\pi/4) = \sqrt{2}/2,$	$\sin(\pi/4) = \sqrt{2}/2,$	$\tan(\pi/4) = 1,$	$\cot(\pi/4) = 1$
$\cos(\pi/3) = 1/2,$	$\sin(\pi/3) = \sqrt{3}/2,$	$\tan(\pi/3) = \sqrt{3},$	$\cot(\pi/3) = \sqrt{3}/3$
$\cos(\pi/2) = 0,$	$\sin(\pi/2) = 1,$	$\tan(\pi/2) = \pm\infty,$	$\cot(\pi/2) = 0$
$\cos(\pi) = -1,$	$\sin(\pi) = 0,$	$\tan(\pi) = 0,$	$\cot(\pi) = \pm\infty$
$\cos(3\pi/2) = 0,$	$\sin(3\pi/2) = -1,$	$\tan(3\pi/2) = \pm\infty,$	$\cot(3\pi/2) = 0.$

__Periodicité :__ pour tout $k \in \mathbb{Z}$ on a :

$$\begin{aligned} \cos(x + 2k\pi) &= \cos x \qquad & \tan(x + k\pi) &= \tan x \\ \sin(x + 2k\pi) &= \sin x \qquad & \cot(x + k\pi) &= \cot x \end{aligned}$$

__Egalité :__

$$\begin{aligned} \cos x = \cos y &\iff x = y + 2k\pi \quad \text{ou} \quad x = -y + 2k\pi, \quad \forall k \in \mathbb{Z} \\ \sin x = \sin y &\iff x = y + 2k\pi \quad \text{ou} \quad x = -y + (2k+1)\pi, \quad \forall k \in \mathbb{Z} \\ \tan x = \tan y &\iff x = y + k\pi, \quad \forall k \in \mathbb{Z} \\ \cot x = \cot y &\iff x = y + k\pi, \quad \forall k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Identité circulaire : $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$;

Expression de $\sin x$ et $\tan x$ en fonction de $\cos x$ et de $\cos x$ et $\cot x$ en fonction de $\sin x$:

$$\begin{aligned} \sin x &= \pm\sqrt{1-\cos^2 x} & \cos x &= \pm\sqrt{1-\sin^2 x} \\ \tan x &= \pm\sqrt{\frac{1}{\cos^2 x} - 1} & \cot x &= \pm\sqrt{\frac{1}{\sin^2 x} - 1} \end{aligned}$$

Formule de puissance (Moivre) : $(\cos x + \sin x)^n = \cos(nx) + \sin(nx)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Formules d'addition :

$$\begin{aligned} \cos(x+y) &= \cos x \cos y - \sin x \sin y & \cos(x-y) &= \cos x \cos y + \sin x \sin y \\ \sin(x+y) &= \sin x \cos y + \cos x \sin y & \sin(x-y) &= \sin x \cos y - \cos x \sin y \\ \tan(x+y) &= \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y} & \tan(x-y) &= \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \tan y}. \end{aligned}$$

Formules de duplication :

$$\begin{aligned} \cos(2x) &= \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 \\ \sin(2x) &= 2\sin x \cos x \\ \tan(2x) &= \frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}. \end{aligned}$$

Expression de $\cos x$, $\sin x$ et $\tan x$ en fonction de $t = \tan(x/2)$:

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \qquad \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \qquad \tan x = \frac{2t}{1-t^2}.$$

Formules de linéarisation :

$$\begin{aligned} \cos x \cos y &= \frac{1}{2}(\cos(x+y) + \cos(x-y)) & \sin x \sin y &= \frac{1}{2}(\cos(x-y) - \cos(x+y)) \\ \cos x \sin y &= \frac{1}{2}(\sin(x+y) - \sin(x-y)) & \sin x \cos y &= \frac{1}{2}(\sin(x+y) + \sin(x-y)) \\ \cos^2 x &= \frac{1+\cos(2x)}{2} & \sin^2 x &= \frac{1-\cos(2x)}{2} \end{aligned}$$

Formules de factorisation :

$$\begin{aligned} \cos x + \cos y &= 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right) & \cos x - \cos y &= -2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right) \\ \sin x + \sin y &= 2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right) & \sin x - \sin y &= 2\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)\cos\left(\frac{x+y}{2}\right) \end{aligned}$$

Formules relatives aux angles associés :

1. **Angles opposés :**

   $$\cos(-x) = \cos x \qquad \sin(-x) = -\sin x \qquad \tan(-x) = -\tan x.$$

   Donc la fonction cos est *paire* et la fonction sin est *impaire*.

2. **Angles supplémentaires :**

   $$\cos(\pi - x) = -\cos x \qquad \sin(\pi - x) = \sin x \qquad \tan(\pi - x) = -\tan x.$$

3. **Angles complémentaires :**

   $$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x \qquad \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x \qquad \tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{1}{\tan x}.$$

4. **Angles "de différence π" :**

   $$\cos(x+\pi) = -\cos x \qquad \sin(x+\pi) = -\sin x \qquad \tan(x+\pi) = \tan x.$$

7 Réciproques des fonctions circulaires : les fonctions Arc

Les fonctions circulaires ne sont pas bijectives. Pour en définir les fonctions réciproques, on les restreint jusqu'à en faire des fonctions bijectives. Les fonctions réciproques arccos, arcsin, arctan et arccot sont définies comme suit.

Définition :

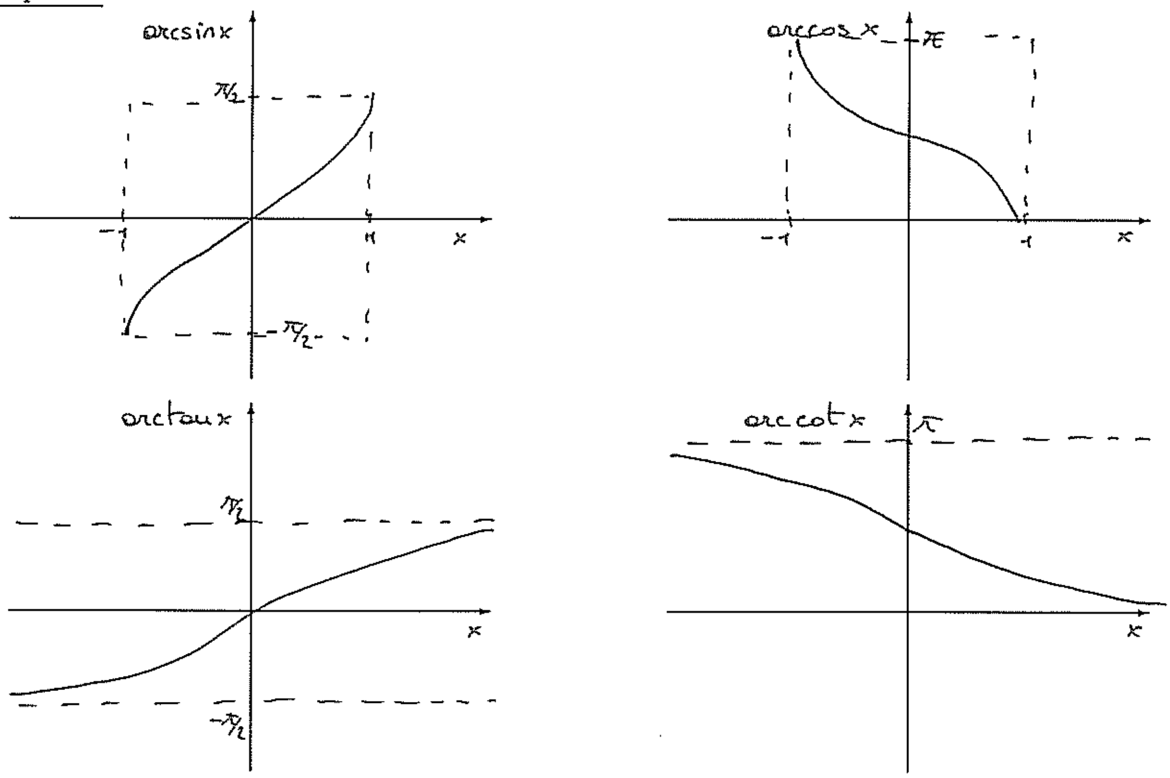
1. **Arc-cosinus** : la fonction arccos : $[-1,1] \longrightarrow [0,\pi]$ est la réciproque de la restriction cos : $[0,\pi] \longrightarrow [-1,1]$, et est donc définie par l'identité
$$\arccos y = x \quad \Longleftrightarrow \quad y = \cos x \qquad \text{avec } x \in [0,\pi] \text{ et } y \in [-1,1].$$
Par conséquent, on a aussi :
$$\arccos(\cos x) = x \quad \text{pour tout } x \in [0,\pi] \quad \text{et} \quad \cos(\arccos y) = y \quad \text{pour tout } y \in [-1,1].$$

2. **Arc-sinus** : la fonction arcsin : $[-1,1] \longrightarrow [-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ est la réciproque de la restriction sin : $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}] \longrightarrow [-1,1]$ et est donc définie par l'identité
$$\arcsin y = x \quad \Longleftrightarrow \quad y = \sin x \qquad \text{avec } x \in [-\tfrac{\pi}{2},\tfrac{\pi}{2}] \text{ et } y \in [-1,1].$$
Par conséquent, on a aussi :
$$\arcsin(\sin x) = x \quad \text{pour tout } x \in [-\tfrac{\pi}{2},\tfrac{\pi}{2}] \quad \text{et} \quad \sin(\arcsin y) = y \quad \text{pour tout } y \in [-1,1].$$

3. **Arc-tangente** : la fonction arctan : $\mathbb{R} \longrightarrow [-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ est la réciproque de la restriction tan : $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}] \longrightarrow \mathbb{R}$ et est donc définie par l'identité
$$\arctan y = x \quad \Longleftrightarrow \quad y = \tan x \qquad \text{avec } x \in [-\tfrac{\pi}{2},\tfrac{\pi}{2}] \text{ et } y \in \mathbb{R}.$$
Par conséquent, on a aussi :
$$\arctan(\tan x) = x \quad \text{pour tout } x \in [-\tfrac{\pi}{2},\tfrac{\pi}{2}] \quad \text{et} \quad \tan(\arctan y) = y \quad \text{pour tout } y \in \mathbb{R}.$$

4. **Arc-cotangente** : la fonction arccot : $\mathbb{R} \longrightarrow [0,\pi]$ est la réciproque de la restriction cot : $[0,\pi] \longrightarrow \mathbb{R}$ et est donc définie par l'identité
$$\operatorname{arccot} y = x \quad \Longleftrightarrow \quad y = \cot x \qquad \text{avec } x \in [0,\pi] \text{ et } y \in \mathbb{R}.$$
Par conséquent, on a aussi :
$$\operatorname{arccot}(\cot x) = x \quad \text{pour tout } x \in [0,\pi] \quad \text{et} \quad \cot(\operatorname{arccot} y) = y \quad \text{pour tout } y \in \mathbb{R}.$$

Graphes :



Exemples (Détermination de $\arccos y$, $\arcsin y$ et $\arctan y$) :

1. Pour calculer $\arccos\frac{1}{2}$, on pose $x = \arccos\frac{1}{2}$ et on applique la définition de arccos : x est donc l'angle tel que $\cos x = \frac{1}{2}$ et $x \in [0, \pi]$. Ainsi (à l'aide du cercle trigonométrique) on trouve que $x = \frac{\pi}{3} \in [0, \pi]$ est l'angle tel que $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$.

2. Pour calculer $\arcsin\dfrac{1}{2}$, on pose $x = \arcsin\frac{1}{2}$. Alors $\sin x = \frac{1}{2}$ et $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Ainsi on trouve que $x = \frac{\pi}{6} \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ est tel que $\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$.

3. Pour calculer $\arctan 1$, on pose $x = \arctan 1$. Alors $\tan x = 1$ et $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. Ainsi on trouve que $x = \frac{\pi}{4} \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ est tel que $\tan\frac{\pi}{4} = 1$.

Composée des fonctions circulaires et de leur réciproques :

1. **Fonctions composées $\cos\circ\arccos$, $\sin\circ\arcsin$ et $\tan\circ\arctan$:** les fonction $\cos(\arccos x)$ et $\sin(\arcsin x)$ n'ont de sens que si $x \in [-1, 1]$. Par contre la fonction $\tan(\arctan x)$ a un sens pour tout $x \in \mathbb{R}$. On a les égalités suivantes :

$$\begin{aligned}
\cos(\arccos x) &= x \quad \text{pour tout } x \in [-1, 1],\\
\sin(\arcsin x) &= x \quad \text{pour tout } x \in [-1, 1],\\
\tan(\arctan x) &= x \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

2. **Fonctions composées $\arccos\circ\cos$, $\arcsin\circ\sin$ et $\arctan\circ\tan$:** les fonctions $\arccos(\cos x)$ et $\arcsin(\sin x)$ ont un sens pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $\arctan(\tan x)$ a un sens pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$. Cependant, les fonctions Arc sont les réciproques de certeines fonctions circulaires restreintes, et on a donc :

$$\begin{aligned}
\arccos(\cos x) &= x \quad \text{pour tout } x \in [0, \pi],\\
\arcsin(\sin x) &= x \quad \text{pour tout } x \in [-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}],\\
\arctan(\tan x) &= x \quad \text{pour tout } x \in]-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}[,
\end{aligned}$$

alors que, en général, on a $\arccos(\cos x) \neq x$, $\arcsin(\sin x) \neq x$ et $\arctan(\tan x) \neq x$. En effet, en dehors des domaines restreints, et en toute généralité, on a :

$$\begin{aligned}
\arccos(\cos x) &= y \quad \text{tel que } \cos x = \cos y \text{ et } y \in [0, \pi],\\
\arcsin(\sin x) &= y \quad \text{tel que } \sin x = \sin y \text{ et } y \in [-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}],\\
\arctan(\tan x) &= y \quad \text{tel que } \tan x = \tan y \text{ et } y \in]-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}[.
\end{aligned}$$

3. **Fonctions composées $\arccos\circ\sin$ et $\arcsin\circ\cos$:** les fonctions $\arccos(\sin x)$ et $\arcsin(\cos x)$ sont définies pour tout $x \in \mathbb{R}$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
\arccos(\sin x) &= y \iff y \in [0, \pi] \quad \text{et} \quad \cos y = \sin x\\
\arcsin(\cos x) &= y \iff y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \quad \text{et} \quad \sin y = \cos x.
\end{aligned}$$

Exemples (Détermination de $\arccos(\cos x)$, $\arcsin(\sin x)$ et $\arctan(\tan x)$) :

1. Pour calculer $\arccos(\cos(9\frac{\pi}{4}))$, on pose $y = \arccos(\cos(9\frac{\pi}{4}))$ et on applique la définition de la fonction arccos : on a $\cos y = \cos(9\frac{\pi}{4})$ avec $y \in [0, \pi]$. Comme $\cos(9\frac{\pi}{4}) = \cos(\frac{\pi}{4})$ et $\frac{\pi}{4} \in [0, \pi]$, on obtient alors $y = \frac{\pi}{4}$.

2. Pour calculer $\arcsin(\sin(9\frac{\pi}{4}))$, on pose $y = \arcsin(\sin(9\frac{\pi}{4}))$: on a donc $\sin y = \sin(9\frac{\pi}{4})$ avec $y \in [-\pi/2, \pi/2]$. Comme $\sin(9\frac{\pi}{4}) = \sin(\frac{\pi}{4})$ et $\frac{\pi}{4} \in [-\pi/2, \pi/2]$, on obtient alors $y = \frac{\pi}{4}$.

3. Pour calculer $\arctan(\tan(9\frac{\pi}{4}))$, on pose $y = \arctan(\tan(9\frac{\pi}{4}))$: on a alors $\tan y = \tan(9\frac{\pi}{4})$ avec $y \in]-\pi/2, \pi/2[$. Comme $\tan(9\frac{\pi}{4}) = \tan(\frac{\pi}{4})$ et $\frac{\pi}{4} \in]-\pi/2, \pi/2[$, on obtient alors $y = \frac{\pi}{4}$.

Exemples (Détermination de $\arccos(\sin x)$ et $\arcsin(\cos x)$) :

1. Pour calculer $\arccos(\sin(\frac{\pi}{3}))$, on pose $y = \arccos(\sin(\frac{\pi}{3}))$: on a alors $\sin(\frac{\pi}{3}) = \cos y$ avec $y \in [0, \pi]$. On trouve ainsi $y = \frac{\pi}{6}$.

2. Pour calculer $\arcsin(\cos(\frac{2\pi}{3}))$, on pose $y = \arcsin(\cos(\frac{2\pi}{3}))$: on a alors $\cos(\frac{2\pi}{3}) = \sin y$ avec $y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Comme $\cos(\frac{2\pi}{3}) = -\frac{1}{2}$, on trouve ainsi $y = -\frac{\pi}{6}$.

8 Fonctions exponentielles

Les fonctions puissances entières $x \mapsto x^n$, leur inverses $x \mapsto x^{-n}$ et les racines $x \mapsto x^{\frac{1}{n}}$ permettent de donner un sens à toute puissance a^q, où $a \in \mathbb{R}^*$ est un nombre réel non nul, et $q \in \mathbb{Q}$ est un nombre ratonnel de signe quelconque. Pour tout $a > 0$, on a donc une fonction $q \mapsto a^q$ de domaine $D = \mathbb{Q}$ et image contenue dans $\mathbb{R}_+^*$, qui vérifie les proprietés des puissance entières.

Définition : Pour tout $a \in \mathbb{R}$, avec $a > 0$, on appelle **exponentiel de base** a la fonction $x \mapsto a^x$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}$, qui est l'unique extention à l'ensemble $\mathbb{R}$ de la fonction $q \mapsto a^q$ définie pour $q \in \mathbb{Q}$, verifiant les proprietés

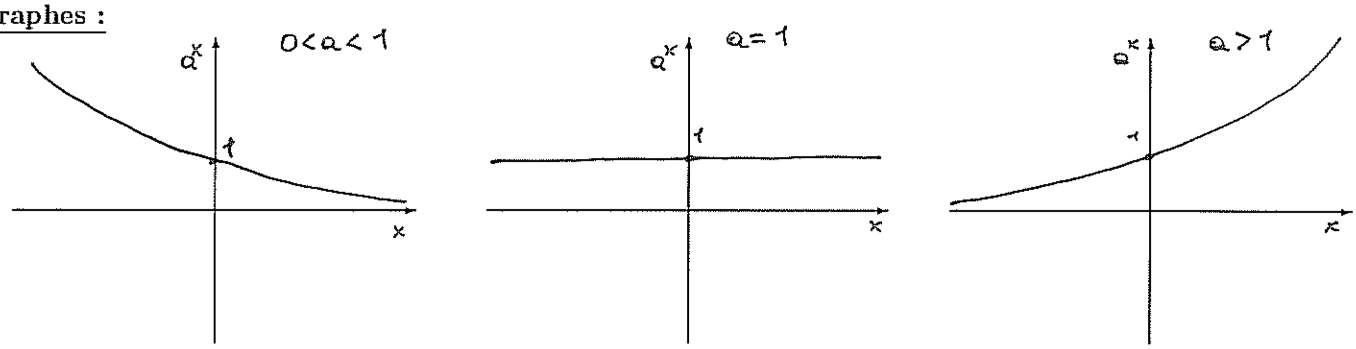
$$a^0 = 1, \qquad a^1 = a, \qquad a^x a^y = a^{x+y}, \qquad (a^x)^y = a^{xy}, \qquad \text{pour tout } x, y \in \mathbb{R}.$$

Si a et b sont deux bases reélles positives, on a aussi

$$a^x b^x = (ab)^x \qquad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

La fonction exponentielle de base $a > 0$ a donc pour domaine $D = \mathbb{R}$, et pour image $I =]0, +\infty[$ si $a \neq 1$, et $I = \{1\}$ si $a = 1$.

Graphes :



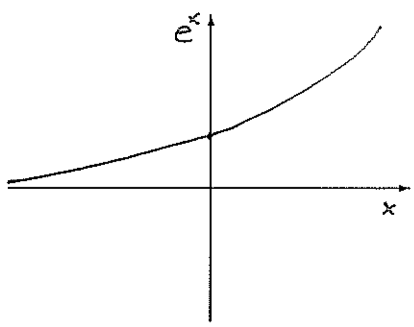
Exponentiel de base e : On appelle **nombre de Neper** le nombre réel e qui peut être défini comme

- limite d'une suite ou d'une fonction : $e = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$,
- ou bien comme somme d'une série : $e = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n!}$.

et approché desormais par des millions de chiffres décimales, dont voici les prémières 50 :

$$e = 2,71828182845904523536028747135266249775724709369995...$$

L'exponentiel de base e est la fonction exponentielle de base e, notée $\exp : \mathbb{R} \longrightarrow]0, \infty[: x \mapsto \exp(x) = e^x$. Puisque $e > 1$, son graphe est



9 Réciproque de l'exponentiel : le logarithme

Pour tout nombre réel a tel que $a > 0$ et $a \neq 1$, la fonction exponentielle de base a, $x \mapsto a^x$, est bijective (décroissante si $0 < a < 1$ et croissante si $a > 1$), avec domaine $D = \mathbb{R}$ et image $I =]0, \infty[$. Elle admet donc une réciproque.

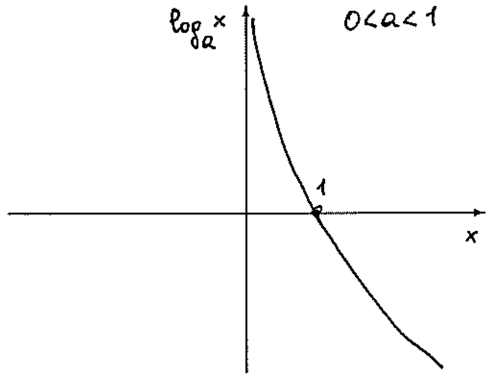
Définition : On appelle **logarithme de base** a la réciproque de l'exponentielle de base a, c'est-à-dire la fonction $\log_a :]0, \infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ définie par la proprieté

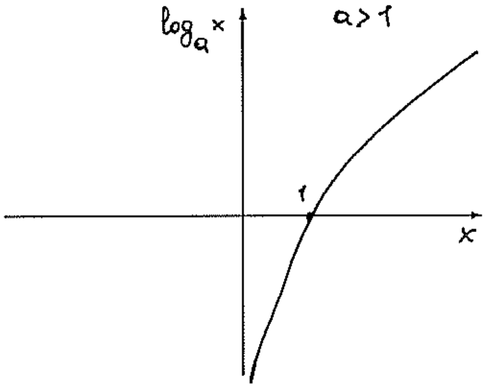
$$\log_a y = x \quad \Longleftrightarrow \quad y = a^x \quad \text{pour tout } x, y \in \mathbb{R} \text{ et } y > 0.$$

Par conséquent, on a aussi :

$$\log_a(a^x) = x \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad a^{\log_a y} = y \quad \text{pour tout } y \in]0, \infty[.$$

Graphes :





Propriétés des logarithmes : pour tout $a, b \in \mathbb{R}$, $a, b > 0$ et $a, b \neq 1$, et pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, $x, y > 0$, on a :

$$\log_a 1 = 0, \qquad \log_a a = 1,$$

$$\log_a x + \log_a y = \log_a(xy), \qquad x \log_a y = \log_a(y^x), \quad \text{donc} \quad \log_a x - \log_a y = \log_a \left(\frac{x}{y}\right)$$

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}, \quad \text{donc} \quad \log_a b = \frac{1}{\log_b a}, \quad \text{et} \quad \log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}.$$

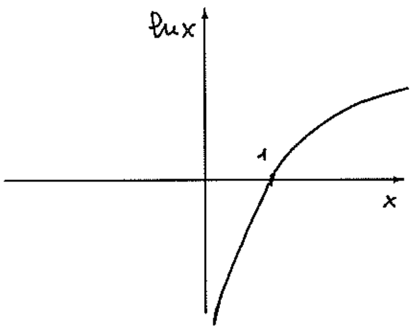
Logarithme naturel ou neperien : la réciproque de l'exponentiel $x \mapsto e^x$ de base le nombre de Neper s'appelle **logarithme naturel** et s'indique avec les symbols log ou ln. Le logarithme naturel $\ln :]0, \infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ est donc défini par la propriété :

$$\ln y = x \quad \Longleftrightarrow \quad y = e^x \quad \text{pour tout } x, y \in \mathbb{R} \text{ et } y > 0,$$

et satisfait aux identités

$$\ln(e^x) = x \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad e^{\ln y} = y \quad \text{pour tout } y \in]0, \infty[.$$

Son graphe est



Élévation à une puissance entre fonctions : Si f et g sont deux fonctions réelles, et f est telle que $f(x) > 0$ pour tout $x \in D_f$, on appelle **puissance de f par g** la fonction réelle f^g définie par

$$x \mapsto (f^g)(x) := f(x)^{g(x)} := e^{g(x) \ \ln f(x)},$$

et qui a donc comme domaine l'ensemble $D_{f^g} = D_f \cap D_g$.

Remarque : Cette opération n'est ni associative ni commutative, car en général on a $(f^g)^h \neq f^{\left(g^h\right)}$ et $f^g \neq g^h$.

Exemples : $x^x = e^{x \ln x}$, $x^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{x} \ln x}$, $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e^{x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}$.

10 Fonctions hyperboliques

Définition : On appelle **fonctions hyperboliques** les quatre fonctions suivantes :

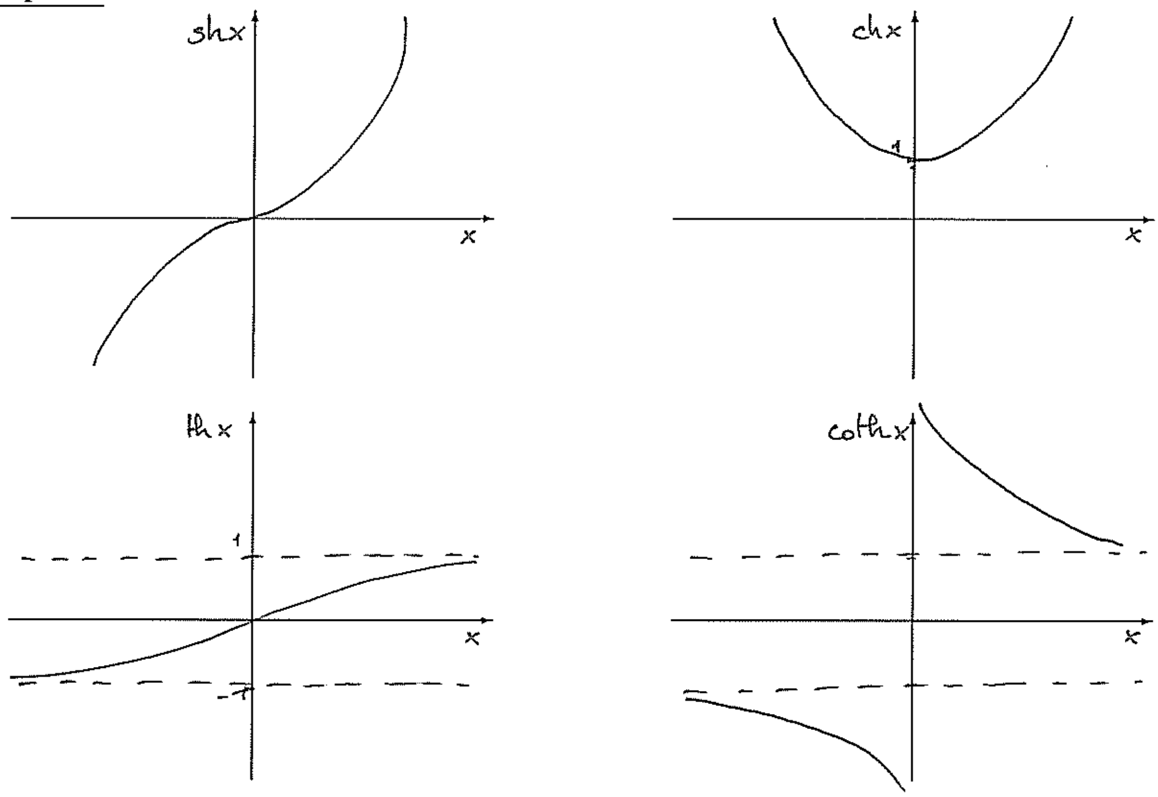
1. **cosinus hyperbolique** : $\mathrm{ch} : \mathbb{R} \longrightarrow [1, \infty[\, : x \mapsto \mathrm{ch}\, x := \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$.

2. **sinus hyperbolique** : $\mathrm{sh} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \mathrm{sh}\, x := \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$.

3. **tangente hyperbolique** : $\mathrm{th} : \mathbb{R} \longrightarrow \,]-1, +1[\, : x \mapsto \mathrm{th}\, x := \dfrac{\mathrm{sh}\, x}{\mathrm{ch}\, x} = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$.

4. **cotangente hyperbolique** : $\mathrm{coth} : \mathbb{R} \longrightarrow \,]-\infty, -1[\cup]+1, +\infty[\, : x \mapsto \mathrm{coth}\, x := \dfrac{1}{\mathrm{th}\, x} = \dfrac{\mathrm{ch}\, x}{\mathrm{sh}\, x} = \dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$.

Graphes :



Quelques valeurs particulières :

$$\mathrm{ch}(0) = 1, \qquad \mathrm{sh}(0) = 0, \qquad \mathrm{th}(0) = 0, \qquad \mathrm{coth}(0) = \pm\infty$$

Relation avec l'exponentiel : $\mathrm{ch}\, x + \mathrm{sh}\, x = e^x$ et $\mathrm{ch}\, x - \mathrm{sh}\, x = e^{-x}$.

Identité hyperbolique : $\mathrm{ch}^2 x - \mathrm{sh}^2 x = 1$.

Expression de $\mathrm{sh}\, x$ et $\mathrm{th}\, x$ en fonction de $\mathrm{ch}\, x$ et de $\mathrm{ch}\, x$ et $\mathrm{coth}\, x$ en fonction de $\mathrm{sh}\, x$:

$$\begin{aligned} \mathrm{sh}\, x &= \pm\sqrt{\mathrm{ch}^2 x - 1} & \qquad \mathrm{ch}\, x &= \sqrt{\mathrm{sh}^2 x + 1} \\ \mathrm{th}\, x &= \pm\sqrt{1 - \frac{1}{\mathrm{ch}^2 x}} & \qquad \mathrm{coth}\, x &= \pm\sqrt{1 + \frac{1}{\mathrm{sh}^2 x}} \end{aligned}$$

Formule de puissance : $(\mathrm{ch}\, x + \mathrm{sh}\, x)^n = \mathrm{ch}(nx) + \mathrm{sh}(nx)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Formules relatives aux variables opposés :

$$\operatorname{ch}(-x) = \operatorname{ch} x \qquad \operatorname{sh}(-x) = -\operatorname{sh} x \qquad \operatorname{th}(-x) = -\operatorname{th} x.$$

Donc la fonction ch est *paire* et la fonction sh est *impaire*.

Formules d'addition :

$$\begin{array}{rclcrcl}
\operatorname{ch}(x+y) & = & \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y + \operatorname{sh} y \operatorname{sh} x & \qquad & \operatorname{ch}(x-y) & = & \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y - \operatorname{sh} y \operatorname{sh} x \\
\operatorname{sh}(x+y) & = & \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y + \operatorname{sh} y \operatorname{ch} x & & \operatorname{sh}(x-y) & = & \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y - \operatorname{sh} y \operatorname{ch} x \\
\operatorname{th}(x+y) & = & \dfrac{\operatorname{th} x + \operatorname{th} y}{1 + \operatorname{th} x \operatorname{th} y} & & \operatorname{th}(x-y) & = & \dfrac{\operatorname{th} x - \operatorname{th} y}{1 - \operatorname{th} x \operatorname{th} y}
\end{array}$$

Formules de duplication :

$$\operatorname{ch}(2x) = \operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x \qquad \operatorname{sh}(2x) = 2 \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x \qquad \operatorname{th}(2x) = \frac{2 \operatorname{th} x}{1 + \operatorname{th}^2 x}$$

Formules de linéarisation :

$$\operatorname{ch}^2 x = \frac{\operatorname{ch}(2x) + 1}{2} \qquad \operatorname{sh}^2 x = \frac{\operatorname{ch}(2x) - 1}{2} \qquad \operatorname{th}^2 x = \frac{\operatorname{ch}(2x) - 1}{\operatorname{ch}(2x) + 1}$$

Formules de factorisation :

$$\begin{array}{rcl}
\operatorname{ch} x - \operatorname{ch} y & = & 2\operatorname{sh}\left(\dfrac{x+y}{2}\right) \operatorname{sh}\left(\dfrac{x-y}{2}\right) \\
\operatorname{sh} x + \operatorname{sh} y & = & 2\operatorname{sh}\left(\dfrac{x+y}{2}\right) \operatorname{ch}\left(\dfrac{x-y}{2}\right)
\end{array}$$