Limites de fonctions réelles et fonctions continues

1 Limites d'une fonction

Point d'adhérence : Soit $D \subset \mathbb{R}$ un ensemble de nombres réels. Un nombre réel x_0 s'appelle **point adhérent à** D si tout intervalle ouvert $]a,b[$ contenant x_0 a une intersection non vide avec D, $]a,b[\, \cap D_f \neq \emptyset$, c'est-à-dire si $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, x \in D$ t.q. $|x - x_0| < \varepsilon$, ou de manière équivalente s'il existe une suite $(x_n)_n \subset D$ t.q. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$.

Limites d'une fonction : Soit $f : D_f \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction réelle, et soit $x_0 \in \mathbb{R}$ un point adhérent à D_f, ou bien $x_0 = \pm\infty$ si D_f contient des intervalles $]a,+\infty[$ ou $]-\infty,b[$. On dit que f **admet limite** $\ell \in \mathbb{R}$ **ou** $\pm\infty$ **en** x_0 si :

1. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \ell \quad\Leftrightarrow\quad f(x) \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} \ell \quad\Longleftrightarrow\quad \forall\varepsilon > 0, \exists\, \delta > 0$ t.q. $\forall x \in D_f : |x-x_0| < \delta \Rightarrow |f(x)-\ell| < \varepsilon$.
2. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty, \quad\Leftrightarrow\quad f(x) \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} +\infty \quad\Longleftrightarrow\quad \forall A > 0, \exists\, \delta > 0$ t.q. $x \in D_f : |x-x_0| < \delta \Rightarrow f(x) > A$.
3. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = -\infty \quad\Leftrightarrow\quad f(x) \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} -\infty \quad\Longleftrightarrow\quad \forall A > 0, \exists\, \delta > 0$ t.q. $x \in D_f : |x-x_0| < \delta \Rightarrow f(x) < -A$.
4. $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \ell \quad\Leftrightarrow\quad f(x) \underset{x\to +\infty}{\longrightarrow} \ell \quad\Longleftrightarrow\quad \forall\varepsilon > 0, \exists\, B > 0$ t.q. $\forall x \in D_f : x > B \Rightarrow |f(x)-\ell| < \varepsilon$.
5. $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty \quad\Leftrightarrow\quad f(x) \underset{x\to +\infty}{\longrightarrow} +\infty \quad\Longleftrightarrow\quad \forall A > 0, \exists\, B > 0$ t.q. $\forall x \in D_f : x > B \Rightarrow f(x) > A$.
6. $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = -\infty \quad\Leftrightarrow\quad f(x) \underset{x\to +\infty}{\longrightarrow} -\infty \quad\Longleftrightarrow\quad \forall A > 0, \exists\, B > 0$ t.q. $\forall x \in D_f : x > B \Rightarrow f(x) < -A$.
7. $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = \ell \quad\Leftrightarrow\quad f(x) \underset{x\to -\infty}{\longrightarrow} \ell \quad\Longleftrightarrow\quad \forall\varepsilon > 0, \exists\, B > 0$ t.q. $\forall x \in D_f : x < -B \Rightarrow |f(x)-\ell| < \varepsilon$.
8. $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = +\infty \quad\Leftrightarrow\quad f(x) \underset{x\to +\infty}{\longrightarrow} +\infty \quad\Longleftrightarrow\quad \forall A > 0, \exists\, B > 0$ t.q. $\forall x \in D_f : x < -B \Rightarrow f(x) > A$.
9. $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = -\infty \quad\Leftrightarrow\quad f(x) \underset{x\to +\infty}{\longrightarrow} -\infty \quad\Longleftrightarrow\quad \forall A > 0, \exists\, B > 0$ t.q. $\forall x \in D_f : x < -B \Rightarrow f(x) < -A$.

On voit la limite $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ sur le graphe de f, comme la valeur où tend $f(x)$ quand x se rapproche de plus en plus à x_0.

Remarque : La condition "$|x-x_0| < \delta$" signifie que $x \in\,]x_0-\delta, x_0+\delta[$, i.e. que x est dans un intervalle ouvert autour de x_0. De même, la condition "$|f(x)-\ell| < \varepsilon$" signifie que $f(x) \in\,]\ell-\varepsilon, \ell+\varepsilon[$, i.e. que $f(x)$ est dans un intervalle ouvert autour de ℓ. Par analogie, on peut interpreter "$x > B$" comme un intervalle ouvert autour de $+\infty$, et "$x < -B$" comme un intervalle ouvert autour de $-\infty$.

Exemples :

1. $\lim\limits_{x\to 2}(x^2+1) = 5, \quad \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x^2} = +\infty, \quad \lim\limits_{x\to +\infty} \operatorname{th} x = +1, \quad \lim\limits_{x\to -\infty} e^x = 0, \quad \lim\limits_{x\to -\infty} x^2 = +\infty, \quad \lim\limits_{x\to -\infty} x^3 = -\infty.$
2. La limite $\lim\limits_{x\to\infty} \sin x$ n'existe pas, car la fonction $\sin x$ oscille entre -1 et $+1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, et donc aussi pour x qui grandit indéfinement vers l'infini. Pour la même raison, la limite $\lim\limits_{x\to 0} \sin\dfrac{1}{x}$ n'existe pas non plus.

Proposition (unicité de la limite) : Lorsqu'une fonction f admet une limite ℓ ou $\pm\infty$, cette limite est unique.

Limites à gauche et à droite : Soit $f : D_f \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction réelle, et $x_0 \in \mathbb{R}$ un point adhérent à D_f. On dit que la **limite à gauche** ou **à droite** de f en x_0 est ℓ si :

1. **limite à gauche** ($x < x_0$) :
   $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = \ell \quad\Leftrightarrow\quad f(x) \underset{x\to x_0^-}{\longrightarrow} \ell \quad\Longleftrightarrow\quad \forall\varepsilon > 0,\ \exists\, \delta > 0$ t.q. $\forall x \in D_f : x_0 - \delta < x < x_0 \Rightarrow |f(x)-\ell| < \varepsilon$.
2. **limite à droite** ($x > x_0$) :
   $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = \ell, \quad\Leftrightarrow\quad f(x) \underset{x\to x_0^+}{\longrightarrow} \ell \quad\Longleftrightarrow\quad \forall\varepsilon > 0,\ \exists\, \delta > 0$ t.q. $\forall x \in D_f : x_0 < x < x_0 + \delta \Rightarrow |f(x)-\ell| < \varepsilon$.

Exemples : $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{1}{x} = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x} = +\infty$; $\lim\limits_{x\to 0^-} \operatorname{th}\dfrac{1}{x} = -1$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} \operatorname{th}\dfrac{1}{x} = 1$.

Proposition (existence des limites) : Soit $f : D_f \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction réelle, et $x_0 \in \mathbb{R}$ un point adhérent à D_f. Alors la limite de f en x_0 existe, et elle vaut $\ell \in \mathbb{R}$ ou $\pm\infty$, si et seulement si les limites à gauche et à droite de f en x_0 existent et elles ont la même valeur ℓ ou $\pm\infty$. Autrement dit :

$$\exists \lim_{x\to a} f(x) = \ell \quad \text{ou} \quad \pm\infty \qquad \Longleftrightarrow \qquad \lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x) = \ell \quad \text{ou} \quad \pm\infty.$$

Exemples : $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x}$ et $\lim\limits_{x\to 0} \operatorname{th} \frac{1}{x}$ n'existent pas, car les limites à gauche et à droite sont différentes.

2 Propriétés des limites

Opérations sur les limites : Si f et g admettent une limite en x_0 (nombre réel ou $\pm\infty$), et $a \in \mathbb{R}$, on a :

1. $\lim\limits_{x\to x_0} |f(x)| = |\lim\limits_{x\to x_0} f(x)|$.
2. $\lim\limits_{x\to x_0} \big(f(x) \pm g(x)\big) = \Big(\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\Big) \pm \Big(\lim\limits_{x\to x_0} g(x)\Big)$.
3. $\lim\limits_{x\to x_0} \big(af(x)\big) = a \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$.
4. $\lim\limits_{x\to x_0} \big(f(x)g(x)\big) = \Big(\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\Big)\Big(\lim\limits_{x\to x_0} g(x)\Big)$.
5. $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim_{x\to x_0} f(x)}{\lim_{x\to x_0} g(x)}$.
6. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)^{g(x)} = \Big(\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\Big)^{\left(\lim\limits_{x\to x_0} g(x)\right)}$.
7. On ne peut rien dire en général sur $\lim\limits_{x\to x_0} (f \circ g)(x)$, sans avoir une condition supplémentaire sur f (continue).

Limite d'une fonction constante : $f(x) = c \in \mathbb{R}$ pour tout $x \in]a, b[\quad \Longrightarrow \quad \exists \lim\limits_{x\to a^+} f(x) = c$ et $\exists \lim\limits_{x\to b^-} f(x) = c$.

Prolongement des inégalités à la limite : $f(x) \leq g(x)$ pour tout $x \quad \Longrightarrow \quad \lim\limits_{x\to x_0} f(x) \leq \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$.

Règle des gendarmes : Si $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ pour tout x, alors $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} h(x) = \ell \quad \Longrightarrow \quad \exists \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \ell$.

Exemples :

1. $\lim\limits_{x\to -2} |\operatorname{sh}(x)| = |\lim\limits_{x\to -2} \operatorname{sh}(x)| = |\operatorname{sh}(-2)| = |-\operatorname{sh}(2)| = \operatorname{sh}(2)$.
2. $\lim\limits_{x\to 2} (x^2 + x^3) = \Big(\lim\limits_{x\to 2} x^2\Big) + \Big(\lim\limits_{x\to 2} x^3\Big) = 2^2 + 2^3 = 4 + 8 = 12$.
3. $\lim\limits_{x\to 9} (5\sqrt{x}) = 5 \lim\limits_{x\to 9} \sqrt{x} = 5 \cdot \sqrt{9} = 5 \cdot 3 = 15$.
4. $\lim\limits_{x\to 1} (x^3 \ln x) = \Big(\lim\limits_{x\to 1} x^3\Big)\Big(\lim\limits_{x\to 1} \ln x\Big) = 1 \cdot 0 = 0$.
5. $\lim\limits_{x\to \pi} \dfrac{\sin x}{x} = \dfrac{\lim\limits_{x\to\pi} \sin x}{\lim\limits_{x\to\pi} x} = \dfrac{0}{\pi} = 0$.
6. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} \big(\sin x\big)^{\frac{8x}{\pi}} = \Big(\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} \sin x\Big)^{\left(\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} \frac{8x}{\pi}\right)} = \Big(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\Big)^{\frac{8}{\pi}\frac{\pi}{4}} = \Big(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\Big)^2 = \dfrac{1}{2}$.
7. $\lim\limits_{x\to 0} \sin \frac{1}{x}$ n'existe pas, mais $\lim\limits_{x\to 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$ car $-x \leq x \, \sin \frac{1}{x} \leq x$ et $\lim\limits_{x\to 0} -x = \lim\limits_{x\to 0} x = 0$.

3 Fonctions équivalentes

Fonctions équivalentes : Deux fonctions f et g sont **équivalentes en** x_0 : $f(x) \underset{x\to x_0}{\sim} g(x) \quad \Longleftrightarrow \quad \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$.

Exemple : $\operatorname{sh}(x) \underset{x\to x_0}{\sim} \sin(x)$.

Proposition : $f(x) \underset{x\to x_0}{\sim} g(x)$ et $g(x) \underset{x\to x_0}{\sim} h(x) \quad \Longrightarrow \quad f(x) \underset{x\to x_0}{\sim} h(x)$.

4 Formes détérminées et indétérminées

<u>Formes détérminées :</u> Les opérations usuelles sur $\mathbb{R}$ se prolongent à $\pm\infty$ comme suit :

1. $(+\infty)+(+\infty)=(+\infty)+\ell=+\infty$ pour tout $\ell\in\mathbb{R}$,
2. $(-\infty)+(-\infty)=(-\infty)+\ell=-\infty$ pour tout $\ell\in\mathbb{R}$,
3. $(+\infty)\cdot(+\infty)=(-\infty)\cdot(-\infty)=\ell\cdot(+\infty)=+\infty$ pour tout $\ell\in\mathbb{R}$ tel que $\ell>0$,
4. $(+\infty)\cdot(-\infty)=\ell\cdot(-\infty)=-\infty$ pour tout $\ell\in\mathbb{R}$ tel que $\ell>0$,
5. $\dfrac{\ell}{+\infty}=\dfrac{\ell}{-\infty}=0$ pour tout $\ell\in\mathbb{R}$,
6. $\dfrac{\ell}{0^+}=+\infty$ et $\dfrac{\ell}{0^-}=-\infty$ pour tout $\ell\in\mathbb{R}$ tel que $\ell>0$,
7. $\infty^{\infty}=\infty^{\ell}=\ell^{\infty}=0^{-\infty}=\infty$ pour tout $\ell\in\mathbb{R}$ tel que $\ell>0$,
8. $\infty^{-\infty}=\infty^{-\ell}=\ell^{-\infty}=0^{\infty}=0$ pour tout $\ell\in\mathbb{R}$ tel que $\ell>0$.

Autrement dit, ces opérations entre limites ont toujours le même résultat (celui indiqué), quelconques soient les fonctions considerées qui tendent à ces limites.

<u>Formes indétérminées (FI) :</u> On appelle **formes indétérminées** les opérations entre limites qui ont des résultats différents selon les fonctions considerées qui tendent à ces limites :

$$\infty-\infty,\qquad 0\cdot(\pm\infty),\qquad \frac{\pm\infty}{\pm\infty},\qquad \frac{0}{0},\qquad \infty^0,\qquad 1^{\pm\infty}.$$

Dans ces cas, le résultat peut être $\ell\in\mathbb{R}$, $\pm\infty$ ou bien il peut ne pas exister, et doit être détérminé au cas par cas.

<u>Exemples (Limites indétérminées avec résultats différents) :</u>

1. **FI** $\infty-\infty$: pour $x\to\infty$, on a $x-(x+1)=-1\longrightarrow -1$ mais $x-x^2=-x^2\Big(1-\dfrac{1}{x}\Big)\longrightarrow -\infty$.
2. **FI** $0\cdot(\pm\infty)$: pour $x\to\infty$, on a $x\cdot\dfrac{1}{x}=1\longrightarrow 1$ mais $x^2\cdot\dfrac{1}{x}=x\longrightarrow\infty$.
3. **FI** $\dfrac{\pm\infty}{\pm\infty}$: pour $x\to\infty$, on a $\dfrac{x}{x}=1\longrightarrow 1$ mais $\dfrac{x^2}{x}=x\longrightarrow\infty$ et $\dfrac{x}{x^2}=\dfrac{1}{x}\longrightarrow 0$.
4. **FI** $\dfrac{0}{0}$: pour $x\to 0$, on a $\dfrac{x}{x}=1\longrightarrow 1$ mais $\dfrac{x^2}{x}=x\longrightarrow 0$ et $\dfrac{x}{x^2}=\dfrac{1}{x}$ n'existe pas.
5. **FI** ∞^0 : pour $x\to\infty$, on a $x^{\frac{1}{x}}=e^{\frac{\ln x}{x}}\longrightarrow e^0=1$ mais $(e^x)^{\frac{1}{\ln x}}=e^{\frac{x}{\ln x}}\longrightarrow e^{\infty}=\infty$.
6. **FI** $1^{\pm\infty}$: pour $x\to\infty$, on a $\Big(1+\dfrac{1}{x}\Big)^x\longrightarrow e$ mais $\Big(1+\dfrac{1}{x}\Big)^{x^2}=\bigg(\Big(1+\dfrac{1}{x}\Big)^x\bigg)^x\longrightarrow e^{\infty}=\infty$.

<u>Remarque (Comment traiter les formes indétérminées) :</u>

1. **FI** $\dfrac{\pm\infty}{\pm\infty}$: on utilise le Théorème de de L'Hôpital (qui nécéssite les dérivées).
2. **FI** $\dfrac{0}{0}$: on se ramene à la FI $\dfrac{\pm\infty}{\pm\infty}$ avec l'astuce suivante : $\dfrac{0}{0}=\big(\frac{1}{0}\big)\cdot\frac{1}{\left(\frac{1}{0}\right)}=\dfrac{\pm\infty}{\pm\infty}$.
   Sinon, on utilise directament le Théorème de de L'Hôpital.
3. **FI** $0\cdot(\pm\infty)$: on se ramene à la FI $\dfrac{\pm\infty}{\pm\infty}$ avec l'astuce suivante : $0\cdot(\pm\infty)=\frac{1}{\left(\frac{1}{0}\right)}\cdot(\pm\infty)=\dfrac{\pm\infty}{\pm\infty}$.
4. **FI** $\infty-\infty$: au cas par cas, en utilisant des astuces *ad hoc*. Parfois on peut se ramener au cas $0\cdot(\pm\infty)$, et donc au cas $\dfrac{\pm\infty}{\pm\infty}$, en factorisant un ∞ : $\infty-\infty=\infty\cdot(1-f(x))=\infty\cdot 0$, la méthode marche si $f(x)\to 1$.
5. **FI** ∞^0 : on se ramene à la FI $0\cdot\infty$ avec l'astuce suivante : $\infty^0=e^{0\cdot\ln\infty}=e^{0\cdot\infty}$.
6. **FI** $1^{\pm\infty}$: on se ramene à la FI $0\cdot\infty$ avec l'astuce suivante : $1^{\infty}=e^{\infty\cdot\ln 1}=e^{\infty\cdot 0}$.

<u>Limites indétérminés usuels :</u>

1. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}=+\infty,\quad \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x}=0,$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0,\quad \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\ln x}=+\infty.$
2. $\displaystyle\lim_{x\to 0}(x\ln x)=0,\quad \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$ et $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1.$
3. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=1,$ et $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sh}x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{th}x}{x}=1.$

5 Fonctions continues

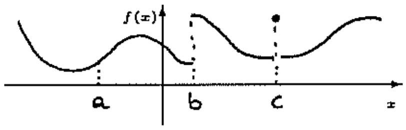
<u>**Fonction continue :**</u> Soit $f : D_f \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. On dit que f est :

1. **continue en un point** $x_0 \in D_f$ si i) f admet une limite finie ℓ en x_0, i.e. $\exists \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$;
   ii) la valeur de f en x_0 est ℓ, i.e. $f(x_0) = \ell$.
2. **continue sur un sous-ensemble** $E \subset D_f$ si f est continue en tout point $x \in E$.

<u>**Critère pratique :**</u> f est continue en x_0 $\iff$ le graphe de f ne fait pas de "saut" en x_0, c'est-à-dire qu'il se trace sans lever la main.

<u>**Exemples :**</u>

1. La fonction



est *continue en a* ;
n'est *pas continue en b* car la condition i) n'est pas satisfaite ;
n'est *pas continue en c* car la condition ii) n'est pas satisfaite.

2. Voici une liste de fonctions usuelles qui sont *continues sur tout leur domaine de définition* : les **fonctions polynomiales** (en particulier les **fonctions constantes**, la **valeur absolue** et les **puissances** n**-ièmes**), les **fractions rationelles**, les **racines** n**-ièmes**, les **fonctions circulaires**, les **fonctions** Arc, les **exponentiels**, les **logarithmes** et les **fonctions hyperboliques**.
3. La fonction **partie entière** $x \mapsto E(x)$ n'est *pas continue en tout point entier*. [N.B. $E(x)$ est polynomiale mais seulement *par morceaux*!] En effet, en tout $x_0 \in \mathbb{Z}$ la condition i) n'est pas satisfaite : $\lim\limits_{x\to x_0^-} E(x) = x_0 - 1$ et $\lim\limits_{x\to x_0^+} E(x) = x_0$, donc $\lim\limits_{x\to x_0} E(x)$ n'existe pas.

<u>**Proposition (Condition suffisante pour la continuité) :**</u> Soit $f : D_f \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

Si f est monotone sur un intervalle $I \subset D_f$ et l'image $f(I)$ est un intervalle, alors f est continue sur I.

6 Propriétés des fonctions continues

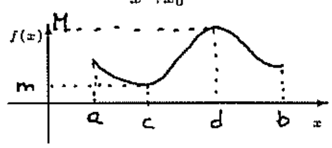
<u>**Opérations sur les fonctions continues :**</u> Soient f et g deux fonctions réelles et $a \in \mathbb{R}$.

1. Si f et g sont continues en x_0, alors les fonctions $|f|$, $f+g$, $f-g$, af et $f\cdot g$ sont continues en x_0.
2. Si, de plus, $g(x_0) \neq 0$, alors les fonctions $\dfrac{1}{g}$ et $\dfrac{f}{g}$ sont aussi continues en x_0.
3. Si g est une fonction continue en $x_0 \in D_g$ et f est une fonction continue en $y_0 = g(x_0) \in D_f$, alors la fonction $f \circ g$ est continue en x_0.
4. Si f est une fonction qui admet la réciproque f^{-1}, et f est continue en x_0, alors f^{-1} est continue en $y_0 = f(x_0)$.

<u>**Opérations sur les limites de fonctions continues :**</u> Si f et g sont deux fonctions telles que

- g admet une limite finie ℓ en $x_0 \in D_g$, i.e. $\exists \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \ell \in \mathbb{R}$,
- f est définie et continue en ℓ, i.e. $\ell \in D_f$ et $\lim\limits_{y\to \ell} f(y) = f(\ell)$,

alors $\lim\limits_{x\to x_0} (f\circ g)(x) = f(\lim\limits_{x\to x_0} g(x)) = f(\ell)$.

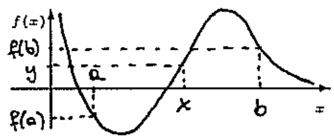


<u>**Théorème de Weierstrass :**</u> Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a,b]$ non vide, fermé et borné. Alors l'image $f([a,b])$ a un minimum m et un maximum M, i.e. $\exists\, c,d \in [a,b]$ t.q. $m = f(c) \leq f(x) \leq f(d) = M \quad \forall x \in [a,b]$.

<u>**Théorème des valeurs intermédiaires :**</u> Soit f une fonction continue sur un intervalle I. Pour tout $a, b \in I$ tel que $f(a) \neq f(b)$, on a :

pour tout y compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe $x \in [a,b]$ tel que $y = f(x)$.

Autrement dit, l'image $f(I)$ d'un intervalle I par une fonction continue est un intervalle.



<u>**Remarques :**</u>

- Par conséquent, si f est continue sur un intervalle $I = [a,b]$ (non vide) fermé et borné, l'image $f([a,b])$ est aussi un intervalle fermé et borné : $f([a,b]) = [m, M]$.
- Si f est continue sur un intervalle $I = [a, +\infty[$ ou $]-\infty, b]$ fermé mais *non borné*, alors l'image $f(I)$ est un intervalle mais pas forcement fermé. Par exemple, pour $f(x) = \frac{1}{x}$ sur $I = [1, +\infty[$, on a $f(I) =]0,1]$.
- Si f est continue sur un intervalle $]a,b[$ borné mais *ouvert*, alors l'image $f(I)$ est un intervalle mais pas forcement fermé ou ouvert. Par exemple, pour $f(x) = x^2$ sur $I =]-1,1[$, on a $f(I) = [0,1[$.

<u>**Proposition (Condition suffisante pour la monotonie) :**</u>

Une fonction f injective et continue sur un intervalle I non vide est strictement monotone sur I.