Math I Analyse
Feuille 2 : borne supérieure, borne inférieure, intervalles

1 Manipulations des définitions

Exercice 1. Soient A, B deux parties bornées de $\mathbb{R}$. On pose $A+B = \{x+y \,:\, x \in A,\ y \in B\}$. De même, on définit $AB = \{x\,y \,:\, x \in A\,, y \in B\}$.

1. Montrer que $\sup(A+B) = \sup(A) + \sup(B)$.
2. A-t-on toujours égalité entre $\sup(A.B)$ et $\sup(A).\sup(B)$? Même question si $A, B \subset [0, \infty[$.
3. Montrer que $\sup\limits_{x,y \in A} |x-y| = \sup A - \inf A$.
4. Si $A \subset B$, montrer que $\sup(A) \leq \sup(B)$ et $\inf(A) \geq \inf(B)$.

Exercice 2. Soient A et B deux parties non vides de $\mathbb{R}$ vérifiant la propriété suivante :

$$\forall x \in A, \quad \forall y \in B, \quad x < y.$$

Montrer que A admet une borne supérieure, et B admet une borne inférieure. Montrer que

$$\sup(A) \leq \inf(B).$$

Exercice 3. On considère un intervalle ouvert $I \subseteq \mathbb{R}$, et $x \in I$. Montrez la proposition suivante :

$$\forall x \in I \quad \exists \varepsilon > 0 \quad]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\subset I.$$

La proposition suivante est-elle vraie ?

$$\exists \varepsilon > 0 \quad \forall x \in I \quad]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\subset I.$$

2 Calculs

Exercice 4. Donner, s'ils existent, le sup, l'inf, le maximum et le minimum des sous ensembles de $\mathbb{R}$ suivants :

$$[0,1],\ [0,1[,\ \mathbb{Q},\ \mathbb{Q} \cap [0, \sqrt{2}[,\ \left\{\frac{1}{n},\ n \in \mathbb{N}^*\right\},\ \{(-1)^n,\ n \in \mathbb{N}^*\},$$
$$\left\{(-1)^n + \frac{(-1)^{n+1}}{n},\ n \in \mathbb{N}^*\right\},\ \left\{(-1)^n + \frac{1}{n}\,;\, n \in \mathbb{N}^*\right\},\ \left\{\frac{1+x}{1+x^2},\ x \in \mathbb{R}^+\right\}.$$

Exercice 5. Soit $J = \left\{x \in \mathbb{R},\ -2 < x + \frac{1}{2x} \leq 2\right\}$. L'ensemble J est-il un intervalle ? Déterminer, s'ils existent, la borne supérieure, la borne inférieure, le plus petit et le plus grand élément de J.

Exercice 6. Soit $A = \left\{ \dfrac{m}{mn+1},\ m \in \mathbb{N},\ n \in \mathbb{N}^* \right\}$.
Montrer que 1 est un majorant de A et que 0 est un minorant de A. Montrer que ce sont respectivement les bornes sup et inf de A. Le nombre 1 (resp. 0) est il un max (resp. min) ?
Reprendre l'exercice avec $n \in \mathbb{N}$.
On verra que l'on peut refaire cet exercice en utilisant la caractérisation séquentielle de la borne supérieure, qui sera énoncée dans un chapitre ultérieur.

Exercice 7. On considère la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \exp(-x^2)$. On considère l'ensemble $A = \{f(x)\,;\, x \in \mathbb{R}\}$. Calculer $\sup A$, $\inf A$. L'ensemble A a-t-il un maximum, un minimum ? Mêmes questions pour la fonction $g : [1, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(x) = \sin(\pi/x)$.

Exercice 8 (Sous-groupes additifs de $\mathbb{R}$)**.** Soit G un sous-groupe additif de $\mathbb{R}$. Le but de l'exercice est de montrer que G est dense ou monogène.

1. Rappeler la définition d'un groupe, et trouver des sous-groupes additifs de $\mathbb{R}$.
2. Si G est non réduit à $\{0\}$, montrer que $G \cap]0, +\infty[$ a une borne inférieure que l'on note a.
3. Si $a > 0$, montrer que $a \in G$ et que $G = a\mathbb{Z}$.
4. Si $a = 0$, montrer que pour tout $\epsilon > 0$, il existe un $g \in G$ tel que $0 < g < \epsilon$ et en déduire que G est dense dans $\mathbb{R}$.

Exercice 9. Soient $A = \{x^2 + y^2,\ x, y \in \mathbb{R}\,,\ xy = 1\}$, et $B = \{xy, x, y \in \mathbb{R} \text{ et } x^2 + y^2 \leq 2\}$.
Donner, s'ils existent, le sup, l'inf, le maximum et le minimum de A et B.

Indications : pour A on pourra étudier la fonction $x \to x^2 + \dfrac{1}{x^2}$;
pour B on posera $x = r\cos(\theta),\ y = r\sin(\theta)$ avec $0 \leq r \leq \sqrt{2},\ 0 \leq \theta \leq 2\pi$.