Math I Analyse
Feuille 4 : Fonctions, fonctions continues

1 Quelques calculs élémentaires

1.1 Limites

On rappelle les limites suivantes :
. $\lim\limits_{x\to+\infty} \exp\ x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \exp\ x = 0$
. $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln\ x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0} \ln\ x = -\infty$.

Exercice 1. Soit n un entier supérieur ou égal à 1.
a) Montrer que l'on a $\lim\limits_{x\to+\infty} x^n = +\infty$.
b) Montrer que l'on a $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt[n]{x} = +\infty$.
c) Montrer que l'on a $\lim\limits_{x\to+\infty} 1/x^n = 0$.

Exercice 2. Calculer
a) $\lim_{x\to+\infty} \frac{\cos\ x}{\sqrt{x}}$
b) $\lim\limits_{x\to+\infty} (\sqrt{x} - x)$, puis $\lim\limits_{x\to+\infty} \exp(\sqrt{x} - x)$
c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \big(2\ln(x+1) - \ln(x^2+1)\big)$
d) la limite de $\exp(1/x)$ à gauche et à droite en 0.

Exercice 3. Calculer la limite des fonctions suivantes en la valeur de a donnée.

1. $f_1(x) = \dfrac{x^3-1}{x^2-1}\,, a = 1\,,$
2. $f_2(x) = x^2 + \dfrac{\sqrt{x^2}}{x}\,, a = 0\,,$
3. $f_3(x) = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} - \sqrt{x}\,, a = +\infty\,,$
4. $f_4(x) = 3 + \sqrt{x^2+5x} - \sqrt{x^2-1}\,, a = -\infty\,,$
5. $f_5(x) = \sqrt{x^2-1} - x\,, a = +\infty\,,$
6. $f_6(x) = \dfrac{1}{1-x} - \dfrac{2}{x^2-1}\,, a = 1\,,$
7. $f_7(x) = \dfrac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{x-2}-\sqrt{2}}\,, a = 4\,,$
8. $f_8(x) = (x-2)^2 \ln\big(x^3-1\big)\ , a = 2\,,$
9. $f_9(x) = \dfrac{\sin x}{\sin 3x},\quad a = 0\,.$

1.2 Etudes de fonctions

Exercice 4. Pour les fonctions suivantes :
– Déterminer le domaine de définition, l'image, les limites aux bornes du domaine et l'allure de la courbe.

– Ces fonctions sont-elles injectives ? surjectives ? bijectives ?

1. $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2+2|x|}{x}$.
2. $g : \mathbb{R} \setminus \{1; 2\} \to \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{x^2-4}{x^2-3x+2}$.
3. $h :]-\pi, \pi[\to \mathbb{R}$, $h(x) = \frac{(\sin x)^2}{1+\cos x}$.
4. $j :]-\pi/2, \pi/2[\to \mathbb{R}$, $j(x) = \tan x$.
5. $k :]-1, 0[\cup]0, \infty[\to \mathbb{R}$, $k(x) = \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1+x^2}}{x}$.

2 Fonctions rélles : monotonie, bornes

Exercice 5. On note $\exp : \mathbb{R} \to]0, +\infty[$ la fonction exponentielle et $\ln :]0, +\infty, \mathbb{R}[$ la fonction logarithme népérien.

a) Soient $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction paire et $f := u \circ \ln$. Montrer que l'on a $f(x) = f(1/x)$ pour tout $x > 0$.

b) Soit $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction telle que $f(x) = f(1/x)$ pour tout $x > 0$. Montrer que la fonction $f \circ \exp$ est paire. En déduire qu'il existe une fonction paire $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $f = u \circ \ln$.

Exercice 6. Soient f et g deux fonctions à valeurs réelles définies sur un même intervalle I.

a) Montrer que si f et g sont croissantes sur I, alors $f + g$ est croissante sur I.

b) Supposons que f et g sont positives ou nulles sur I. Montrer que si f et g sont croissantes (resp. décroissantes) sur I, alors le produit fg est une fonction croissante (resp. décroissante) sur I .

c) Montrer que si f et g ont le même sens de variation, la composée, si elle existe, est croissante, tandis que si elles ont un sens de variation différent, la composée, si elle existe, est décroissante.

Exercice 7. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = \dfrac{x}{1+|x|}$.

a) Etudier le sens de variation de f.

b) Montrer que f est bornée. Dessiner le graphe de f.

Exercice 8. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = x \ \cos \ x$. Calculer $f(n\pi)$ pour tout n. La fonction f est-elle majorée ? Est-elle minorée ?

Exercice 9. Soient f et g deux fonctions à valeurs réelles définies sur un même intervalle I. Pour tout nombre x de I, on pose $M(x) = max(f(x), g(x))$ et $m(x) := min(f(x), g(x))$. Montrer que si les fonctions f et g sont croissantes, alors les fonctions M et m sont croissantes aussi.

Exercice 10. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction périodique (on supposera que f a pour période 1). On suppose de plus que f a une limite en $+\infty$. Montrez que f est constante.

3 Continuité

3.1 Concepts élémentaires

Exercice 11. Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses :

1. La somme de deux fonctions continues en un point est continue en ce point.

2. La somme d'une fonction continue et d'une discontinue en un point est discontinue en ce point.
3. La somme de deux fonctions discontinues en un point est discontinue en ce point.
4. La somme de deux fonctions discontinues en un point est continue en ce point.
5. Le produit d'une fonction continue et d'une discontinue en un point est discontinue en ce point.

Exercice 12. Soit $f : [-4; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par :
$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x+4} \text{ si } x \in [-4; 0]; \\ x^2 + 2 \text{ si } x \in \mathbb{R}_+. \end{cases}$
Démontrer que f est continue en tout point de son domaine de définition.

Exercice 13. Soient f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}^+$ telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+ \; g(x) > 0 \text{ et } \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L \neq 0\,.$$

1. Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 0$.
2. Montrer que, si $L > 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \infty$.

Exercice 14. 1. Soient $a \in \mathbb{R}$ et $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une application continue en a. On suppose que $f(a) > 0$. Montrer la propriété suivante :

$$\exists \eta > 0\,;\, \forall x \in [a - \eta, a + \eta], \quad f(x) > 0\,.$$

2. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Montrer que la fonction $|f|$ définie par $|f|(x) = |f(x)|$ est continue. La réciproque est-elle vraie ?
3. Soient f, g deux fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, et soit h l'application définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par :
$$h(x) = \max(f(x), g(x)).$$
Montrer que la fonction h est continue sur $\mathbb{R}$. *Indication : On pourra montrer que* $h = \dfrac{|f - g| + g + f}{2}$.

Exercice 15. On considère la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \begin{cases} xE(1/x) & \text{si } x \neq 0\,, \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Déterminer l'ensemble des points de continuité de f et tracer son graphe.

Exercice 16. Les fonctions suivantes sont-elles prolongeables par continuité sur $\mathbb{R}$?

1. $f(x) = \sin x \, \sin\left(\frac{1}{x}\right)$.
2. $g(x) = \frac{1}{1-x} - \frac{2}{1-x^2}$.

Exercice 17. Soit $f : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction croissante telle que la fonction $x \longmapsto \frac{f(x)}{x}$ soit décroissante. Démontrer que f est continue.

3.2 Propriétés fondamentales des fonctions continues : caractérisation séquentielle, atteinte des bornes sur un intervalle fermé, théorème des valeurs intermédiaires

Exercice 18. Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses :

1. L'image par une fonction continue d'un intervalle ouvert est un intervalle ouvert.
2. L'image par une fonction continue d'un intervalle fermé est un intervalle fermé.
3. L'image par une fonction continue d'une partie bornée est une partie bornée.
4. L'image réciproque par une fonction continue d'un intervalle est un intervalle.

Exercice 19. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue. Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes :

1. $\lim\limits_{|x|\to+\infty} |f(x)| = +\infty$.
2. L'image réciproque par f de toute partie bornée de $\mathbb{R}$ est bornée.

Exercice 20. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie par $f(x) = x^5 - 5x + 1$. Étudier les variations de f. En déduire que l'équation $x^5 - 5x + 1 = 0$ a trois solutions réelles.

Exercice 21. Montrer que l'équation $x^3 + x^2 - 4x + 1 = 0$ admet au plus trois solutions distinctes dans $\mathbb{R}$.

Exercice 22. Soit $f : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = 2x\ln(x) - x + 1$. Déterminer les variations de f, ses limites en 0 et $+\infty$, puis démontrer que l'équation $f(x) = 0$ a deux solutions réelles, dont la plus petite est strictement inférieure à $\frac{1}{e}$.

Exercice 23. (Théorème de point fixe) Soit f une fonction de $[a, b]$ dans $[a, b]$ telle que pour tout x et x' ($x \neq x'$) de $[a, b]$, on ait : $|f(x) - f(x')| < |x - x'|$.

1. Montrer que f est continue sur $[a, b]$.
2. Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une et une seule solution dans $[a, b]$. (On pourra introduire la fonction : $x \mapsto g(x) = f(x) - x$).

Exercice 24. – Soient $a < b$ deux nombres réels, et $f : [a, b] \to [a, b]$ une application continue. Montrez qu'il existe $\alpha \in [a, b]$ tel que $f(\alpha) = \alpha$.

– Soient f, g des applications continues de $[0, 1]$ dans lui-même, telles que $f \circ g = g \circ f$. On se propose d'étudier l'existence de solution à l'équation $f(x) = g(x)$.

1. On pose $Y = \{y \in [0, 1]\,;\, f(y) = y\}$. Montrer que Y possède une borne supérieure et une borne inférieure. On les notera respectivement M et m.
2. Soit $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de Y, qui converge vers a. Montrer que $a \in Y$.
3. Montrer que $M \in Y$ et $m \in Y$.
4. Montrer que $g(Y) \subseteq Y$.
5. Montrer que $g(M) \leq f(M)$ et $f(m) \leq g(m)$.
6. En déduire qu'il existe $\beta \in [0, 1]$ tel que $f(\beta) = g(\beta)$.

Exercice 25. Un cycliste parcourt 90 km en quatre heures.

1. Est-il légitime de supposer que la fonction f donnant la distance parcourue jusqu'à un instant t est continue ?

2. Montrez qu'il existe un intervalle de deux heures pendant le trajet du cycliste durant lequel il a parcouru exactement 45 km.
3. Même question avec un intervalle de 80 minutes, et une distance de 30 km.

Exercice 26. Soient f et g deux fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ telles que, pour tout x dans $[0,1]$, on ait :

$$0 \; < \; f(x) \; < \; g(x) \, .$$

1. Pour x dans $[0,1]$, on pose $h(x) = f(x)/g(x)$. Montrer que $h\big([0,1]\big) \subset]0,1[$.
2. En déduire qu'il existe deux nombres réels m et M dans l'intervalle *ouvert* $]0,1[$ tels que, pour tout x de $[0,1]$:

$$m \; \leqslant \; h(x) \; \leqslant \; M \, .$$

3. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite quelconque d'éléments de $[0,1]$. On définit alors une autre suite par $y_n = \big(h(x_n)\big)^n$. Montrer que la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et préciser sa limite.

Exercice 27. Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue. On veut montrer que :

$$M := \sup\{f(x) : a \leq x \leq b\} = \sup\{f(x) : a < x < b\}.$$

1. Montrer que :

$$\sup\{f(x) : a \leq x \leq b\} \geq \sup\{f(x) : a < x < b\}.$$

Indication : On pourra montrer que $\sup\{f(x) : a \leq x \leq b\}$ *est un majorant de* f *sur* $]a,b[$.

2. Soit $x_0 \in [a,b]$ tel que $f(x_0) = M$. Montrer que $f(x_0) = \sup\{f(x) : a < x < b\}$ en distinguant 3 cas : $x_0 = a$, $x_0 = b$, $x_0 \in]a,b[$. Pour le cas $x_0 = a$, par exemple, on pourra considérer la suite de réels $a_n = a + 1/n$ et étudier la suite $(f(a_n))$.