Math I Analyse
Feuille 5 : Fonctions dérivables

1 Concepts élémentaires

Exercice 1. Soit I un intervalle ouvert et non vide de $\mathbb{R}$, soit $f : I \to \mathbb{R}$ et soit $x_0 \in I$. Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

1. Si f dérivable en x_0 alors f est continue en x_0.
2. Si f continue en x_0 alors f est dérivable en x_0.
3. Si f est dérivable sur I, alors $f' : I \to \mathbb{R}$ est continue.
4. Si f n'est pas dérivable en x_0, alors f n'est pas continue en x_0.

Exercice 2. Dire en quels points les fonctions suivantes (définies sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$) sont dérivables, dérivables à droite, dérivables à gauche, et donner leurs dérivées.

1. $f_1(x) = \cos(\cos x)$
2. $f_2(x) = \sqrt{|\sin x|}$
3. $f_3(x) = \sqrt{1 + \cos x}$

Exercice 3. Etudier la dérivabilité, sur leur domaine de définition, des applications suivantes :

$$\begin{array}{ll}
f : [0, \infty[\to \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}\,, & g : [-1, \infty[\to \mathbb{R}, \quad g(x) = x\sqrt{x+1}\sin x\,, \\
h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad h(x) = \frac{x}{1+|x|}\,, & i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad i(x) = x\,|x|\,, \\
j :]0, \infty[\to \mathbb{R}, \quad j(x) = x \sin(\ln x)\,, &
\end{array}$$

Exercice 4. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie de la manière suivante :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} & \text{si} \quad x \leq 0 \\ \dfrac{1}{1+x} & \text{si} \quad x \in]0, 1] \\ \dfrac{2 - \ln x}{4} & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$

1. En quels points la fonction f est-elle continue ?
2. En quels points est-elle dérivable ? En chacun des points, donner la valeur de la fonction dérivée.

2 Prolongement de fonctions : continu, ou plus *régulier* ?

Exercice 5. Soit $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie de la manière suivante :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{1+x} & \text{si} \quad 0 \leq x \leq \frac{1}{2}\,, \\ 2x + \lambda\, x^2 & \text{si} \quad \frac{1}{2} < x \leq 1 \end{cases}$$

1. Déterminer, s'ils existent, les $\lambda \in \mathbb{R}$ pour que f soit continue sur $[0,1]$.
2. Déterminer, s'ils existent, les $\lambda \in \mathbb{R}$ pour que f soit dérivable sur $[0,1]$.

Exercice 6. Pour chacune des fonctions ci-dessous, déterminer l'ensemble des points où elles sont continues, dérivables, ainsi que l'ensemble des points où leur dérivée est continue.

$$f(x) = \begin{cases} \sin(1/x) & \text{si} \quad x \neq 0\,, \\ 0 & \text{si} \quad x = 0\,, \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} x\,\sin(1/x) & \text{si} \quad x \neq 0\,, \\ 0 & \text{si} \quad x = 0\,, \end{cases} \quad h(x) = \begin{cases} x^2\,\sin(1/x) & \text{si} \quad x \neq 0\,, \\ 0 & \text{si} \quad x = 0\,. \end{cases}$$

3 Règle de l'Hôpital

Exercice 7. En utilisant la règle de l'Hôpital, calculer les limites suivantes :

1. $\lim_{x\to 0} \frac{(1+\sin x)^2 - \cos x}{x}$.
2. $\lim_{x\to 1} \frac{2x + \sin(2x-2) - 2}{x\cos x - \cos x + \sin(x-1)}$.

4 Autour des théorèmes de Rolle et des accroissements finis

Exercice 8. Démontrer que l'équation $x^n + ax + b = 0$, pour $a, b \in \mathbb{R}$, a au plus trois solutions réelles. Donner des exemples de n, a, et b pour lesquelles elle en a exactement 0,1,2, et 3.

Exercice 9. Soit $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur $[0,1]$ et dont la fonction dérivée est continue sur $[0,1]$). On suppose que $f(0) = 0$, et que pour tout $x \in [0,1]$, on a $f'(x) > 0$. Montrer qu'il existe un $m > 0$ tel que pour tout $x \in [0,1]$, on ait $f(x) \geq mx$.

Exercice 10. Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction infiniment dérivable (on dit que f est de classe C^∞). On suppose que f s'annule $n+1$ fois, en les points $a_0 = a$, a_1, $\ldots$, a_{n-1}, $a_n = b$.

1. Montrer que pour tout $0 \leq i \leq n-1$, la fonction f' s'annule au moins une fois sur l'intervalle $]a_i, a_{i+1}[$. En particulier, elle s'annule au moins n fois.
2. Montrer que la fonction $f^{(n)}$ s'annule sur $]a,b[$.

Exercice 11. Démontrer les inégalités suivantes :

1. $|\sin x - \sin y| \leq |x - y|$ pour tous $x, y \in \mathbb{R}$.
2. $\dfrac{x}{2} < \ln(1+x) < x$ pour tout $x \in]0,1[$.

5 Problèmes

Exercice 12. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction strictement positive, dérivable, qui tend vers 0 en $+\infty$ et en $-\infty$. Montrez qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $f'(c) = 0$.

Exercice 13 (Examen 2007)**.** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n > 0$, on définit la fonction $f_n : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ par :

$$f_n(x) = \exp(-\frac{x}{n}) - 2\,(1 - x)\,.$$

1. Dans cette question, l'entier $n > 0$ est fixé.
   a. Montrer que la fonction f_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$.
   b. Montrer qu'il existe un unique $x_n \in]0, 1[$ tel que $f_n(x_n) = 0$.
   c. Montrer que $f_{n+1}(x_n) > 0$.
2. On considère maintenant la suite $(x_n)_{n \geq 1}$.
   a. Montrer à l'aide de la question précédente que la suite $(x_n)_n$ est décroissante.
   b. En déduire qu'elle converge. On notera x sa limite.
3. Il s'agit ici de calculer x.
   a. Montrer que $-\frac{x_n}{n} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.
   b. Conclure.

Exercice 14. Pour tout n entier supérieur ou égal à 2, on considère la fonction polynômiale de degré n définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$P_n(x) = x^n + x^{n-1} + x^2 + x - 1\,.$$

1. Soit $n > 2$: Montrer que P_n a une unique racine réelle positive que l'on nommera α_n.
2. Montrer que la suite $(\alpha_n)_{n>2}$ est croissante puis qu'elle converge vers une limite que l'on notera α.
3. Montrer que α est racine du polynôme $X^2 + X - 1$. En déduire sa valeur.