Math I Analyse
Feuille 6 : Equations différentielles

Exercice 1. Déterminer les fonctions $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dérivables sur $\mathbb{R}$, telles que :

1. $2y' - 3y = 0$.
2. $y' + 2y = 0$.

Déterminer les fonctions $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$, telles que :

1. $y'' + y = 0$.
2. $y'' - 4y' + 3y = 0$.
3. $y'' + y' + y = 0$.

Exercice 2. Résoudre les équations suivantes en précisant le domaine d'existence des solutions :

1. $x^3\, y'(x) + x^2\, y(x) = x$.
2. $x\, y'(x) + 2\, y(x) = x^2$.
3. $y'(x) + cos(x)\, y(x) = 0$.
4. $(1 + x^2)\, y'(x) + x\, y(x) = 2\, x^2 + 1$ (on pourra chercher une solution particulière sous la forme d'un polynôme non constant).
5. $y''(x) + 4\, y(x) = x\, \sin x$ (on pourra chercher chercher une solution particulière sous la forme $(ax + b) \sin x + (cx + d) \cos x$).

Exercice 3. Résoudre dans $\mathbb{R}$:

$$\begin{cases} y'' + y' - 12y = 0\,, \\ y(2) = 2\,, \\ y'(2) = 0\,. \end{cases}$$

Exercice 4 (Un principe du maximum)**.** Soient f et g deux solutions définies sur $\mathbb{R}$ de l'équation

$$y' = a(t)\, y(t) + b(t)\,,$$

où a et b sont des fonctions dont la dérivée existe et est continue sur $\mathbb{R}$, avec de plus $a(t) > 0,\ t \in \mathbb{R}$. Montrer que s'il existe un $t_0 \in \mathbb{R}$ tel que $f(t_0) < g(t_0)$, alors $\forall t \in \mathbb{R}\,, f(t) < g(t)\,.$