CORRIGÉ DU CONTRÔLE CONTINU NUMÉRO 2 – 14 avril 2011

QCM. [5] – Répondre par "vrai" ou "faux", sans justifier.

1. [1] – Si on reparamétrise une courbe régulière, la courbe obtenue peut ne pas être régulière.

Rép. – FAUX.
Si $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ est régulière en tout point $\gamma(t)$, i.e. $\gamma'(t) \neq \vec{0}$ pour tout $t \in I$, et si $\varphi : J \longrightarrow I$ est une reparamétrisation $t = \varphi(u)$, i.e. φ est un C^1-difféomorphisme, alors $\varphi'(u) \neq 0$ pour tout $u \in J$ (la réciproque $\varphi^{-1} : I \longrightarrow J$ existe, elle est de classe C^1 et $(\varphi^{-1})'(t) = \frac{1}{\varphi'(u)}\Big|_{u=\varphi^{-1}(t)}$). Ainsi la courbe reparamétrée $\tilde{\gamma}(u) = \gamma(\varphi(u))$ a une vitesse non nulle $\tilde{\gamma}'(u) = \gamma'(t)\Big|_{t=\varphi(u)} \cdot \varphi'(u) \neq \vec{0}$ pour tout $u \in J$.

---

2. [1] – Une courbe paramétrée avec accélération nulle ne peut pas être régulière.

Rép. – FAUX.
Il existe des courbes paramétrées avec accélération nulle qui sont regulières, par exemple $\gamma(t) = (t+a, t+b)$, qui a pour vitesse $\gamma'(t) = (1,1)$.

---

3. [1] – Une courbe paramétrée avec accélération nulle a une courbure nulle.

Rép. – VRAI.
Si $t \mapsto \gamma(t)$ est une courbe telle que $\gamma''(t) = \vec{0}$ pour tout t, alors sa courbure vaut $k(t) = \dfrac{||\gamma'(t) \wedge \gamma''(t)||}{||\gamma'(t)||^3} = \vec{0}$ en tout t.

---

4. [1] – Si une courbe est paramétrée par longueur d'arc, en tout point son vecteur accélération est perpendiculaire à son vecteur vitesse.

Rép. – VRAI.
Pour toute courbe $t \mapsto \gamma(t)$ on a $\dfrac{d}{dt}||\gamma'(t)||^2 = \dfrac{d}{dt}\langle \gamma'(t), \gamma'(t)\rangle = 2\,\langle \gamma'(t), \gamma''(t)\rangle$.
Si $||\gamma'(t)|| = 1$ pour tout t, alors $\langle \gamma'(t), \gamma''(t)\rangle = \dfrac{1}{2}\,\dfrac{d}{dt}||\gamma'(t)||^2 = 0$, donc $\gamma'(t)$ est orthogonale à $\gamma''(t)$.

---

5. [1] – Le vecteur vitesse et le vecteur accélération d'une courbe plane régulière forment toujours une base du plan.

Rép. – FAUX.
Cela n'est pas vrai si $\gamma''(t) = \vec{0}$ ou si $\gamma''(t) \neq \vec{0}$ est parallèle à $\gamma'(t)$, c'est-à-dire quand le support de la courbe est une droite. Par exemple, pour $\gamma(t) = (\operatorname{sh} t, \operatorname{sh} t)$, on a $\gamma''(t) = \coth t\ \gamma'(t)$.

Exercice. [15] – On considère la courbe $\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ donnée par $\gamma(t) = (\operatorname{ch} t, \operatorname{sh} t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

1. [2] – Trouver l'équation cartesienne du support Γ de γ et dessiner la courbe.

Rép. – Posons $x = \operatorname{ch} t$ et $y = \operatorname{sh} t$. Puisque $\operatorname{ch}^2 t - \operatorname{sh}^2 t = 1$, le support Γ est inclus dans l'hyperbole d'équation cartesienne $x^2 - y^2 = 1$.
Puisque $\operatorname{ch} t \geq 1$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ et $\operatorname{sh} t$ prend toutes les valeures réelles pour $t \in \mathbb{R}$, on a $x \geq 1$ et $y \in \mathbb{R}$, donc Γ coïncide avec la branche droite de l'hyperbole (à dessiner).

---

2. [2] – Déterminer les points réguliers de γ.

Rép. – On a $\gamma'(t) = (\operatorname{sh} t, \operatorname{ch} t)$ et $||\gamma'(t)||^2 = \operatorname{sh}^2 t + \operatorname{ch}^2 t \neq 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, car $\operatorname{ch}^2 t \geq 1$, donc γ est régulière en tous ses points.

---

3. [2] – Trouver les points de la courbe où le vecteur accélération est perpendiculaire au vecteur vitesse.

Rép. – L'accélération $\gamma''(t)$ est perpendiculaire à la vitesse $\gamma'(t)$ si et seulement si $\gamma''(t) \neq \vec{0}$ et $\langle \gamma'(t), \gamma''(t) \rangle = 0$.
On a $\gamma''(t) = (\operatorname{ch} t, \operatorname{sh} t) \neq \vec{0}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, car $\operatorname{ch} t \neq 0$, et

$$\langle \gamma'(t), \gamma''(t) \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} \operatorname{sh} t \\ \operatorname{ch} t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \operatorname{ch} t \\ \operatorname{sh} t \end{pmatrix} \right\rangle = 2 \operatorname{sh} t \operatorname{ch} t = 0 \iff \operatorname{sh} t = 0 \iff t = 0.$$

Donc l'accélération est perpendiculaire à la vitesse en l'unique point $\gamma(0) = (\operatorname{ch} 0, \operatorname{sh} 0) = (1, 0)$.

---

4. [3] – Calculer la courbure de γ. Montrer que la valeur maximale de la courbure est 1.

Rép. – La courbure de γ est $k(t) = \dfrac{||\gamma'(t) \wedge \gamma''(t)||}{||\gamma'(t)||^3}$, où

$$||\gamma'(t) \wedge \gamma''(t)|| = \left| \det \begin{pmatrix} \operatorname{sh} t & \operatorname{ch} t \\ \operatorname{ch} t & \operatorname{sh} t \end{pmatrix} \right| = |\operatorname{sh}^2 t - \operatorname{ch}^2 t| = |-1| = 1,$$

donc $k(t) = \dfrac{1}{(\operatorname{sh}^2 t + \operatorname{ch}^2 t)^{3/2}}$. Puisque $\operatorname{sh}^2 t \geq 0$ et $\operatorname{ch}^2 t \geq 1$, on a $\operatorname{sh}^2 t + \operatorname{ch}^2 t \geq 1$, donc $k(t) \leq 1$. Enfin, puisque en $t = 0$ on a $k(0) = 1$, la valeur maximale de la courbure est 1.

---

5. [3] – Trouver les points de la courbe où le rayon de courbure vaut $2\sqrt{2}$.

Rép. – Le rayon de courbure $R(t) = \dfrac{1}{k(t)} = (\operatorname{sh}^2 t + \operatorname{ch}^2 t)^{3/2}$ vaut $2\sqrt{2} = 2^{3/2}$ si et seulement si $\operatorname{sh}^2 t + \operatorname{ch}^2 t = 2$. On a

$$\operatorname{sh}^2 t + \operatorname{ch}^2 t = \frac{(e^t - e^{-t})^2 + (e^t + e^{-t})^2}{4} = \frac{e^{2t} - 2 + e^{-2t} + e^{2t} + 2 + e^{-2t}}{4} = \frac{e^{2t} + e^{-2t}}{2} = \frac{e^{4t} + 1}{2e^{2t}}.$$

Alors

$$R(t) = 2\sqrt{2} \iff \frac{e^{4t} + 1}{2e^{2t}} = 2 \iff \frac{e^{4t} + 1 - 4e^{2t}}{2e^{2t}} = 0 \iff e^{4t} - 4e^{2t} + 1 = 0$$
$$\iff e^{2t} = 2 \pm \sqrt{3} > 0 \iff t = \frac{1}{2} \ln(2 \pm \sqrt{3}).$$

---

6. [3] – La courbe $\alpha :]0, \infty[\longrightarrow \mathbb{R}^2$ donnée par $\alpha(u) = \left(\dfrac{u}{2} + \dfrac{1}{2u}, \dfrac{u}{2} - \dfrac{1}{2u} \right)$ a-t-elle le même support Γ de la courbe γ ?
Si c'est le cas, trouver la reparamétrisation $u = u(t)$ telle que $\gamma(t) = \alpha(u(t))$.
Sinon, dire quelle est la différence entre les deux courbes.

Rép. – L'application $\mathbb{R} \longrightarrow]0, \infty[: t \mapsto e^t = u$ est un difféomorphisme C^∞ (car inversible et avec réciproque $t = \ln u$ aussi de classe C^∞) tel que $\gamma(t) = \alpha(u(t))$. Elle est donc une reparamétrisation de α en γ, et par conséquent la courbe α a le même support de la courbe γ.
