CORRIGÉ DU CONTRÔLE CONTINU NUMÉRO 3 – 12 mai 2011

QCM. [5] – Répondre par “vrai” ou “faux”, sans justifier.

1. [1] – Le support de la courbe $t \mapsto (t\cos t, t\sin t, t)$ se trouve sur le cône d'équation cartésienne $x^2 + y^2 = z^2$.

Rép. – VRAI.
Si on pose $x = t\cos t$, $y = t\sin t$ et $z = t$ on voit que $x^2 + y^2 = z^2$ et $z = \tan \frac{y}{x}$.

---

2. [1] – Le vecteur binormal d'une courbe plane régulière est toujours nul.

Rép. – FAUX.
Si $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ est régulière en tout point $\gamma(t)$, le vecteur binormal $B(t) = T(t) \wedge N(t)$ est nul si et seulement si le vecteur normal $N(t)$ est colinéaire au vecteur tangent $T(t)$, ce qui arrive seulement si la courbure de γ s'annulle en t.

---

3. [1] – Soit $t \mapsto \gamma(t)$ une courbe régulière. Le plan osculateur de γ en $\gamma(t)$ est le plan engendré par les vecteurs $\gamma'(t)$ et $\gamma''(t)$.

Rép. – FAUX.
Si la courbure de γ s'annulle en t, le vecteur $\gamma''(t)$ est colinéaire au vecteur $\gamma'(t)$, ils n'engendrent pas un plan.

---

4. [1] – Soit $t \mapsto \gamma(t)$ une courbe birégulière. Si la torsion de γ ne s'annulle pas en t, le vecteur $\gamma'''(t)$ n'appartient pas au plan osculateur de γ en $\gamma(t)$.

Rép. – VRAI.
La torsion de γ est donnée par $\tau(t) = \frac{\det\big(\gamma'(t),\gamma''(t),\gamma'''(t)\big)}{||\gamma'(t)\wedge\gamma''(t)||^2}$. Si $\tau(t) \neq 0$, les trois vecteurs $\gamma'(t)$, $\gamma''(t)$ et $\gamma'''(t)$ sont linéairement indépendants, donc $\gamma'''(t)$ n'appartient pas au plan engendré par $\gamma'(t)$ et $\gamma''(t)$. Celui-ci est le plan osculateur car γ est supposée être birégulière.

---

5. [1] – Soit $t \mapsto \gamma(t)$ une courbe régulière. Pour $t < t_0$, γ parcourt un arc de cercle situé dans un plan horizontal, dans le sense horaire. En t_0, γ quitte le plan du cercle et se dirige vers le haut. Alors la torsion de γ en t_0 est negative.

Rép. – VRAI.
Le repère de Frenet de γ au point $\gamma(t_0)$ est le suivant : $T(t_0)$ est un vecteur unitaire horizontal tangent au cercle et dirigé dans le sens horaire, $N(t_0)$ est un vecteur unitaire horizontal, orthogonal à $T(t_0)$ et dirigé vers le centre du cercle, donc $B(t_0) = T(t_0) \wedge N(t_0)$ est le vecteur unitaire vertical dirigé vers le bas.
La torsion de γ au point t_0 est le coéfficient de proportionalité $\tau(t_0)$ entre $N'(t_0)$ et $B(t_0)$, donc elle est positive si $N'(t_0)$ est dirigé vers le bas et negative si $N'(t_0)$ est dirigé vers le haut.
Or, la dérivée $N'(t_0)$ pointe dans la direction où se deplace la courbe en quittant le cercle horizontal (si $T = \gamma'$ et $N = R_\gamma \cdot \gamma''$, on a $N' = R'_\gamma \cdot \gamma'' + R_\gamma \cdot \gamma'''$). Dans notre cas $N'(t_0)$ pointe en haut, donc $\tau(t_0)$ est negative.

Exercice. [15] – On considère la courbe $\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ donnée par $\gamma(t) = (t, \frac{3}{2}\,t^2, \frac{3}{2}\,t^3)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

1. [1] – Trouver deux équations cartésiennes (en x, y et z) qui décrivent le support Γ de γ.

Rép. – Posons $x = t$, $y = \frac{3}{2}\,t^2$ et $z = \frac{3}{2}\,t^3$. On voit alors que le support Γ est donné par les équations cartesiennes $y = \frac{3}{2}\,x^2$ et $z = xy$ (ou bien $z = \frac{3}{2}\,x^3$), pour tout $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}^+$ et $z \in \mathbb{R}$.

---

2. [1] – Déterminer les points réguliers de γ.

Rép. – On a $\gamma'(t) = (1, 3\,t, \frac{9}{2}\,t^2) \neq (0,0,0)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, donc γ est régulière en tous ses points.

---

3. [3] – Trouver une abscisse curviligne $s(t)$. Calculer la longueur de γ entre $\gamma(0)$ et $\gamma(10)$.

Rép. – Toute abscisse curviligne est de la forme $s(t) = \pm \int_{t_0}^t ||\gamma'(u)||\; du + s_0$, où l'on a

$$||\gamma'(t)||^2 = 1 + 9\,t^2 + \frac{81}{4}\,t^4 = \left(1 + \frac{9}{2}\,t^2\right)^2.$$

Choisissons-en une :

$$s(t) = \int_0^t \left(1 + \frac{9}{2}\,u^2\right)\; du = \left[u + \frac{9}{2}\,\frac{1}{3}\,u^3\right]_0^t = t + \frac{3}{2}\,t^3.$$

La longueur de γ entre $\gamma(0)$ et $\gamma(10)$ est donc donnée par $L_0^{10}(\gamma) = \big|s(10) - s(0)\big| = 10 + \frac{3}{2}\,1000 = 1510.$

---

4. [4] – Calculer la courbure de γ. Déterminer les points biréguliers de γ.

Rép. – La courbure est $k(t) = \frac{||\gamma'(t) \wedge \gamma''(t)||}{||\gamma'(t)||^3}$. On a $\gamma''(t) = (0, 3, 9\,t)$, donc $\gamma'(t) \wedge \gamma''(t) = (\frac{27}{2}\,t^2, -9\,t, 3)$ et

$$||\gamma'(t) \wedge \gamma''(t)||^2 = \frac{27^2}{4}\,t^4 + 81\,t^2 + 9 = 9\left(\frac{81}{4}\,t^4 + 9\,t^2 + 1\right) = \left[3\left(\frac{9}{2}\,t^2 + 1\right)\right]^2.$$

Alors $\quad k(t) = \dfrac{3\left(\frac{9}{2}\,t^2 + 1\right)}{\left(1 + \frac{9}{2}\,t^2\right)^{3/2}} = \dfrac{3\sqrt{2}}{\sqrt{2 + 9\,t^2}} \neq 0 \quad$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, donc γ est birégulière partout.

---

5. [3] – Calculer la torsion de γ.

Rép. – La torsion est $\tau(t) = \frac{\det\big(\gamma'(t), \gamma''(t), \gamma'''(t)\big)}{||\gamma'(t) \wedge \gamma''(t)||^2}$. On a $\gamma'''(t) = (0,0,9)$, donc $\det\left(\gamma'(t), \gamma''(t), \gamma'''(t)\right) = 27$ et $\tau(t) = \dfrac{27}{9\,(\frac{9}{2}\,t^2 + 1)^2} = \dfrac{12}{(9\,t^2 + 2)^2}.$

---

6. [3] – Déterminer les vecteur tangent, normal et binormal de γ.

Rép. – On a $\quad T(t) = \frac{\gamma'(t)}{||\gamma'(t)||} = \dfrac{1}{2 + 9\,t^2}\;(2, 6\,t, 9\,t^2) \quad$ et $\quad N(t) = \frac{T'(t)}{||T'(t)||}$, où

$$T'(t) = -\frac{18\,t}{(2 + 9\,t^2)^2}\;(2, 6\,t, 9\,t^2) + \frac{1}{2 + 9\,t^2}\;(0, 6, 18\,t) = \frac{6}{(2 + 9\,t^2)^2}\;(-6\,t, 2 - 9\,t^2, 6\,t),$$

donc $\quad ||T'(t)|| = \dfrac{6}{(2 + 9\,t^2)^2}\;\sqrt{4 + 36\,t^2 + 81\,t^4} = \dfrac{6}{2 + 9\,t^2} \quad$ et $\quad N(t) = \dfrac{1}{2 + 9\,t^2}\;(-6\,t, 2 - 9\,t^2, 6\,t).$

Enfin

$$B(t) = T(t) \wedge N(t) = \frac{1}{(2 + 9\,t^2)^2}\;\big(9\,t^2(2 + 9\,t^2), -6\,t(2 + 9\,t^2), 2(2 + 9\,t^2)\big) = \frac{1}{2 + 9\,t^2}\;(9\,t^2, -6\,t, 2).$$
