CORRIGÉ DU CONTRÔLE CONTINU NUMÉRO 4 – 7 juin 2011

QCM. [5] – Répondre par “vrai” ou “faux”, sans justifier.

1. [1] – Le sous-ensemble $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \neq 1\}$ du plan est simplement connexe.

Rép. – FAUX.
L'ensemble n'est pas connexe, donc il ne peut être simplement connexe.

---

2. [1] – Soit ω une 1-forme différentielle définie sur un sous-ensemble D de $\mathbb{R}^2$.
Si D est simplement connexe et ω est fermée alors ω est exacte sur D.

Rép. – VRAI.
C'est le lemme de Poincaré.

---

3. [1] – Soit ω une 1-forme différentielle définie sur un sous-ensemble D de $\mathbb{R}^2$.
Si D n'est pas simplement connexe et ω n'est pas exacte sur D alors ω n'est pas fermée.

Rép. – FAUX.
Si ω n'est pas exacte, elle peut être fermée ou non independement du domaine. Par exemple, sur $D = \mathbb{R}^2_*$, la forme $\omega(x,y) = \frac{x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x}{x^2+y^2}$ est fermée (mais n'est pas exacte) et la forme $\omega(x,y) = \frac{\mathrm{d}y - \mathrm{d}x}{x^2+y^2}$ n'est pas fermée.

---

4. [1] – Soit γ une courbe plane fermée ayant un point d'auto-intersection (un “huit” avec deux lacets). Pour tout point P qui ne se trouve pas sur le support de γ, le nombre de tours de γ par rapport à P est nul.

Rép. – FAUX.
Si un des lacets du “huit” passe autour de P, le nombre de tours de γ par rapport à P vaut ± 1. Il suffit de tracer une demi-droite partant de P pour le vérifier.

---

5. [1] – Soit γ la courbe à “huit” de la question précédente. L'indice de γ est nul.

Rép. – VRAI.
Les vecteurs tangents unitaires parcourent les trois quarts du cercle unitaire, mais ils reviennent sur eux-mêmes avant de fermer le cercle : le nombre de tours de ces vecteurs autour de $(0,0)$ est nul.

Exercice 1. [3] – Soit $\omega = (2xy - y^2)\,\mathrm{d}x + (x^2 - 2xy)\,\mathrm{d}y$ une 1-forme différentielle sur $\mathbb{R}^2$.

a) [1] – Demontrer que ω est exacte.

Rép. – On calcule $\mathrm{d}\omega$ et on trouve $\mathrm{d}\omega = 0$, donc ω est fermée. Puisque $\mathbb{R}^2$ est simplement connexe, par le lemme de Poincaré ω est exacte.

---

b) [2] – Trouver une primitive f de ω sur $\mathbb{R}^2$.

Rép. – Cherchons une fonction f sur $\mathbb{R}^2$ telle que $\mathrm{d}f = \omega$:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy - y^2 \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x^2 - 2xy \qquad \Longrightarrow \qquad f(x,y) = x^2y - xy^2 + c.$$

Exercice 2. [7] – Soit $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1 - x^2\}$ un sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$.

a) [1] – Calculer l'aire de D en utilisant une intégrale double.

Rép. – $\mathrm{Aire}(D) = \iint_D \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^1 \left(\int_0^{1-x^2} \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \int_0^1 (1 - x^2)\,\mathrm{d}x = \left[x - \frac{1}{3}x^3 \right]_0^1 = \frac{2}{3}.$

---

b) [2] – Calculer l'aire de D en utilisant la formule de Green-Riemann.

Rép. – Puisque $\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y = \mathrm{d}(x\,\mathrm{d}y)$ et D est simplement connexe, par le théorème de Green-Riemann on a $\mathrm{Aire}(D) = \iint_D \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{\partial D+} x\,\mathrm{d}y$. Le bord de D est l'union de trois courbes orientées, et on a :

$$\begin{aligned}
\alpha &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x \le 1,\ y = 0\}, \quad \text{orientée par } x \text{ allant de 0 à 1}, \quad (\text{donc } \mathrm{d}y = 0) \\
\beta &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x \le 1, y = 1 - x^2\}, \quad \text{orientée par } x \text{ allant de 1 à 0}, \quad (\text{donc } \mathrm{d}y = -2x\,\mathrm{d}x) \\
\gamma &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0, 0 \le y \le 1\}, \quad \text{orientée par } y \text{ allant de 1 à 0}, \quad (\text{donc } x = 0).
\end{aligned}$$

On a alors $\int_\alpha x\,\mathrm{d}y = 0$, $\int_\beta x\,\mathrm{d}y = \int_1^0 (-2x^2)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{2}{3}x^3 \right]_0^1 = \frac{2}{3}$, $\int_\gamma x\,\mathrm{d}y = 0$ et $\mathrm{Aire}(D) = \int_\alpha x\,\mathrm{d}y + \int_\beta x\,\mathrm{d}y + \int_\gamma x\,\mathrm{d}y = \frac{2}{3}$.

---

c) [2] – Soit $\omega = x\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$ une 2-forme différentielle sur $\mathbb{R}^2$. Calculer $\iint_D \omega$.

Rép. – $\iint_D \omega = \iint_D x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^1 x \left(\int_0^{1-x^2} \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \int_0^1 (x - x^3)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}x^4 \right]_0^1 = \frac{1}{4}.$

---

d) [2] – Peut-on appliquer la formule de Green-Riemann pour calculer $\iint_D \omega$? Pourquoi ?

Rép. – La 2-forme ω est surment fermée (car $\mathrm{d}\omega$ est la seule 3-forme possible, celle nulle). Puisque $\mathbb{R}^2$ est simplement connexe, ω est aussi exacte : elle admet une primitive η telle que $\mathrm{d}\eta = \omega$. Puisque le domaine D est simplement connexe, on peut donc calculer l'intégrale de ω sur D en utilisant la formule de Green-Riemann : $\iint_D \omega = \int_{\partial D+} \eta$.
Pour completer ce calcul, il suffit de trouver une primitive η de $\omega = x\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$. On trouve par exemple $\eta = \frac{1}{2}x^2\,\mathrm{d}x$, ou bien $\eta = -xy\,\mathrm{d}x$, ou d'autres 1-formes plus compliquées.

Exercice 3. [5] – Soit $\gamma : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ la courbe en coordonnées polaires donnée par $\gamma(\varphi) = \big(5 + \sin(3\varphi)\big)\, e^{i\varphi}$.

a) [2] – Calculer le nombre de tours de γ par rapport au point $O = (0,0)$.

Rép. – Puisque $||\gamma(\varphi)|| = |5 + \sin(3\varphi)| \ge 4$ pour tout $\varphi \in [0, 2\pi]$, la courbe γ ne passe pas par $O = (0,0)$.
On peut écrire $\gamma = \alpha + \beta$, où $\alpha(\varphi) = 5\, e^{i\varphi}$ et $\beta(\varphi) = \sin(3\varphi)\, e^{i\varphi}$. Puisque $||\beta(\varphi)|| \le 1 < 5 = ||\alpha(\varphi)||$ pour tout $\varphi \in [0, 2\pi]$, on a $N(\gamma, O) = N(\alpha, O) = 1$ car le support de α est un cercle simple centré en O et orienté dans le sens anti-horaire.

---

b) [3] – En sachant que $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varphi} e^{i\varphi} = e^{i(\varphi + \frac{\pi}{2})}$, calculer l'indice de γ.

Rép. – L'indice de γ est $\mathrm{Ind}(\gamma) = N(\gamma', O)$, où $O = (0,0)$ et $\gamma'(\varphi) = 3\cos(3\varphi)\, e^{i\varphi} + \big(5 + \sin(3\varphi)\big)\, e^{i(\varphi + \frac{\pi}{2})}$.
On peut écrire $\gamma' = \alpha + \beta + \delta$, où

$$\alpha(\varphi) = 3\cos(3\varphi)\, e^{i\varphi}, \qquad \beta(\varphi) = 5\, e^{i(\varphi + \frac{\pi}{2})}, \qquad \delta(\varphi) = \sin(3\varphi)\, e^{i(\varphi + \frac{\pi}{2})}.$$

Pour tout $\varphi \in [0, 2\pi]$, on a :

$$\begin{aligned}
&||\alpha(\varphi)|| = |3\cos(3\varphi)| \le 3 \quad \text{et} \quad ||\beta(\varphi) + \delta(\varphi)|| = |5 + \sin(3\varphi)| \ge 4, \qquad \text{donc} \quad ||\alpha|| < ||\beta + \delta||; \\
&||\delta(\varphi)|| = |\sin(3\varphi)| \le 1 \quad \text{et} \quad ||\beta(\varphi)|| = 5, \qquad \text{donc} \quad ||\delta|| < ||\beta||.
\end{aligned}$$

En conclusion, on a donc :

$$\mathrm{Ind}(\gamma) = N(\gamma', O) = N(\alpha + \beta + \delta, O) = N(\beta + \delta, O) = N(\beta, O) = 1$$

car le support de β est un cercle simple centré en O et orienté dans le sens anti-horaire.