CONTRÔLE CONTINU NUMÉRO 4 – 7 juin 2011

Réglement – L'épreuve dure 40 minutes. Il est interdit d'utiliser des calculatrices. Notes personnelles et documents sont autorisés. Les téléphones portables doivent être éteints.

Entre crochets [ ] est indiqué le barème sur 20 points.

QCM. [**5**] – Répondre par "vrai" ou "faux", sans justifier.

1. [**1**] – Le sous-ensemble $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \neq 1\}$ du plan est simplement connexe.

2. [**1**] – Soit ω une 1-forme différentielle définie sur un sous-ensemble D de $\mathbb{R}^2$.
Si D est simplement connexe et ω est fermée alors ω est exacte sur D.

3. [**1**] – Soit ω une 1-forme différentielle définie sur un sous-ensemble D de $\mathbb{R}^2$.
Si D n'est pas simplement connexe et ω n'est pas exacte sur D alors ω n'est pas fermée.

4. [**1**] – Soit γ une courbe plane fermée ayant un point d'auto-intersection (un "huit" avec deux lacets). Pour tout point P qui ne se trouve pas sur le support de γ, le nombre de tours de γ par rapport à P est nul.

5. [**1**] – Soit γ la courbe à "huit" de la question précédente. L'indice de γ est nul.

Exercice 1. [**3**] – Soit $\omega = (2xy - y^2)\,\mathrm{d}x + (x^2 - 2xy)\,\mathrm{d}y$ une 1-forme différentielle sur $\mathbb{R}^2$.

a) [**1**] – Demontrer que ω est exacte.

b) [**2**] – Trouver une primitive f de ω sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 2. [**7**] – Soit $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1 - x^2\}$ un sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$.

a) [**1**] – Calculer l'aire de D en utilisant une intégrale double.

b) [**2**] – Calculer l'aire de D en utilisant la formule de Green-Riemann.

c) [**2**] – Soit $\omega = x\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$ une 2-forme différentielle sur $\mathbb{R}^2$. Calculer $\displaystyle\iint_D \omega$.

d) [**2**] – Peut-on appliquer la formule de Green-Riemann pour calculer $\displaystyle\iint_D \omega$? Pourquoi ?

Exercice 3. [**5**] – Soit $\gamma : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ la courbe en coordonnées polaires donnée par $\gamma(\varphi) = \big(5 + \sin(3\varphi)\big)\, e^{i\varphi}$.

a) [**2**] – Calculer le nombre de tours de γ par rapport au point $O = (0, 0)$.

b) [**3**] – En sachant que $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varphi} e^{i\varphi} = e^{i(\varphi + \frac{\pi}{2})}$, calculer l'indice de γ.