M1-Géométrie
Examen,
Janvier 2006

Seules les notes de cours et de travaux dirigés sont autorisées, à l'exclusion des livres, polycops, etc... Les calculatrices et les téléphones portables sont interdits.

Les exercices sont indépendants.

1 Exercice

Soit ω une forme différentielle de degré 1 et de classe C^1 définie sur l'ouvert $U =]1,2[\times]1,2[\times]1,2[$ de $\mathbb{R}^3$. *(On notera (x,y,z) les coordonnées d'un point de U dans la base canonique).*

1. Soient u et v deux applications de classe C^1 de U dans $\mathbb{R}$. On suppose dans cette question que $\omega = udv$. Calculer $\omega \wedge d\omega$.
2. On suppose dans toute cette question que $\omega = dx + xdy + f(x)g(y)dz$, où f et g sont deux applications de classe C^1 partout non nulles et non constantes de $]1,2[$ dans $\mathbb{R}$.
   (a) Montrer que l'équation $\omega \wedge d\omega = 0$ est équivalente à une équation du type $a(x) = b(y), \forall x \in]1,2[, \forall y \in]1,2[$, où a et b sont des applications de $]1,2[$ à valeurs réelles.
   (b) Résoudre l'équation $\omega \wedge d\omega = 0$.
   (c) En déduire l'existence d'applications u, v de classe C^1 de U dans $\mathbb{R}$ telles que $\omega = udv$.
   Indication : on pourra chercher v sous la forme $v(x,y,z) = \alpha x^\beta e^{\gamma y} z$, où α, β, γ sont des constantes.

2 Exercice

2.1 Questions préliminaires

1. Soient U, V, W trois vecteurs non nuls de $\mathbb{R}^3$ tels que $< V, W >= 0$. Montrer que si $< U, W >\neq 0$, alors U et $V \wedge W$ sont linéairement indépendants.

2. Montrer que si une surface S de classe $C^k, k \geq 2$ est régulière en un point, elle est régulière sur un voisinage de ce point.

2.2

Soit S une surface de $\mathbb{R}^3$ de classe $C^k, k \geq 2$. On note N un champ de vecteurs unitaires normal à S et h la seconde forme fondamentale de S. Soit

$$\gamma : \mathbb{R} \to S$$

une courbe sur S régulière de classe $C^k, k \geq 2$, paramétrée par l'abcisse curviligne s. On suppose que le vecteur tangent (unitaire) t de γ vérifie en tout point

$$h(t,t) \neq 0,$$

en d'autres termes, γ n'est tangente à une direction assymptotique en aucun point.

1. Montrer qu'en tout point $s \in \mathbb{R}$, $< (N \circ \gamma)'(s), t(s) > \neq 0$.
   (Pour simplifier les notations, on pourra identifier N et $N \circ \gamma$; on pourra donc écrire l'équation précédente sous la forme $< N'(s), t(s) > \neq 0$.)
2. Soit M la surface de $\mathbb{R}^3$ définie par le paramétrage $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ où

   $$f(s,v) = \gamma(s) + v(N \circ \gamma)(s) \wedge (N \circ \gamma)'(s), \forall s \in \mathbb{R}, \forall v \in \mathbb{R}.$$

   La surface M est-elle régulière au voisinage de tout point $f(s,0)$?
3. Comparer le plan tangent à M et à S en $\gamma(s)$.
4. La courbure de Gauss de M en tout point régulier est-elle nulle ?
5. Déterminer M lorsque S est une sphère (de rayon 1) et γ un équateur de cette sphère.
6. Déterminer M lorsque S est une sphère (de rayon 1) et γ un cercle qui n'est pas un équateur de cette sphère.

3 Exercice

Soit $\gamma : [0,l] \to \mathbb{R}^2$ une courbe plane fermée de classe C^2 birégulière de longueur l paramétrée par l'abcisse curviligne s. On suppose que sa courbure k vérifie $0 < k(s) \leq c$, pour tout $s \in [0,l]$, où c est une constante. *Dans cet exercice, la courbure k considérée est signée, c'est à dire qu'on suppose $\mathbb{R}^2$ orienté, et k définie en tout point s par la formule $< \frac{dt}{ds}, n(s) >= k(s)$, où t est le vecteur tangent unitaire à la courbe et $(t(s), n(s))$ un repère orthonormé direct en s.*

1. On suppose dans cette question que la courbe est simple, (c'est-à-dire sans points d'auto-intersection). Montrer que sa longueur l vérifie :

   $$l \geq \frac{2\pi}{c}.$$

2. On suppose maintenant que l'indice de rotation de γ est N. Montrer qu'alors
$$l \geq \frac{2\pi N}{c}.$$

4 Exercice

Soit S une surface régulière de $\mathbb{R}^3$ de classe C^3. On suppose $\mathbb{R}^3$ et S orientés, et on désigne par $N(p)$ la normale unitaire en tout point $p \in S$. Soit $\gamma : \mathbb{R} \to S$ une courbe sur S birégulière de classe C^3, paramétrée par l'abcisse curviligne s, dont on note $t(s)$ le vecteur tangent en tout point s. Pour tout s, on définit le vecteur $u(s)$ tangent à S tel que $(t(s), u(s))$ soit une base orthonormée directe du plan tangent à S en $\gamma(s)$. On appelle *torsion géodésique* de γ en s la quantité

$$g(s) = < \frac{d(N \circ \gamma)}{ds}, u(s) >, \forall s \in \mathbb{R}.$$

1. En désignant par $(e_1(s), e_2(s))$ deux directions principales en $\gamma(s)$, et $k_1(s), k_2(s)$ les deux courbures principales correspondantes, exprimer $g(s)$ en fonction de $k_1(s), k_2(s)$ et l'angle $\phi(s)$ formé par $e_1(s)$ et $t(s)$.
2. Soit c une ligne de courbure birégulière de S. Calculer la torsion géodésique de c en tout point.
3. On suppose qu'aucun point de S n'est un ombilic. Caractériser les courbes birégulières sur S de torsion géodésique identiquement nulle.

5 Exercice

1. La courbe du plan yOz d'équation $z = y^4$ est-elle régulière en 0 ?
2. Quelle est sa courbure en 0 ?
3. Soit S la surface de révolution de $\mathbb{R}^3$ obtenue en faisant tourner la courbe d'équation $z = y^4, y \in [0, 1[$, autour de l'axe Oz. Déterminer un paramétrage régulier de S au voisinage de O.
   Cette question doit être traitée avec grand soin.
4. Déterminer sans calcul la seconde forme fondamentale de S en O.
   Indication : on pourra utiliser le théorème de Meusnier et sa preuve.