Université Claude Bernard Lyon 1

M1 Géométrie

Examen, Juin 2006

Les notes de cours et de T.D. sont autorisés. Les calculettes et les téléphones portables sont interdits.

Exercice 1 On considère le plan euclidien $\mathbb{E}^2$ muni du repère orthonormé (O, i, j). Les coordonnées d'un point seront notées comme d'habitude (x, y).

Soient a et b deux constantes strictement positives. Soit γ la courbe définie comme suit :

$$x(\phi) = a\cos\phi, y(\phi) = b\sin\phi, \phi \in [0, \frac{\pi}{2}].$$

1. Montrer qu'il s'agit d'un morceau de conique que l'on déterminera précisément.
2. Etant donnée une droite D d'équation
$$ux + vy + w = 0,$$
déterminer la distance de cette droite à l'origine, en fonction de u, v, w.
3. Soient $M(\phi)$ et $M'(\phi')$ deux points de γ. Donner une condition nécessaire et suffisante sur a, b, ϕ, ϕ' pour que les droites normales en $M(\phi)$ et $M'(\phi')$ à γ soient à même distance de O.

Exercice 2 *Dans cet exercice, (i, j, k) désigne le repère canonique de l'espace euclidien $\mathbb{E}^3$.*
On considère la courbe γ de l'espace euclidien $\mathbb{E}^3$, définie pour tout $u \in \mathbb{R}$ par

$$x(u) = \cos^3 u, y(u) = \sin^3 u, z(u) = \frac{3}{4}\cos 2u.$$

1. Déterminer en tout point de cette courbe γ, l'angle de la tangente en ce point avec l'axe Oz. Que peut on conclure ?
2. On projette cette courbe γ sur le plan xOy. On note pr cette projection et on note $c = \mathrm{pr}(\gamma)$ la courbe projetée. On note (T, N, B) le repère de Frénet de γ en chaque point et (t, n) de celui de C en chaque point également.
   (a) Déterminer T en fonction de t et k.

(b) Déterminer N en fonction de n.

(c) Comparer les courbures K de γ et κ de c.

(d) Déterminer B en fonction de t, n et k.

Exercice 3 On laisse tomber un objet dont le bord est une surface S de classe C^2 sur un plan horizontal P, (*on suppose que l'objet ne traverse pas le plan ; penser par exemple à une pierre lisse qui tombe parterre*).

1. On suppose que $S \cap P$ est une surface régulière. Quelle est la seconde forme fondamentale de cette surface ?
2. On suppose que $S \cap P$ est une courbe lisse γ. Que peut-on dire de la courbure de Gauss de S en tout point de cette courbe ?
3. On suppose que $S \cap P$ est réduit à un point p. Que peut-on dire du signe de la courbure de Gauss de la surface S en ce point p.
4. On suppose qu'en tout point de $S \cap P$, la courbure moyenne de S est nulle. Que peut-on dire de la seconde forme fondamentale de S en tout point de $S \cap P$?

On justifiera soigneusement chaque réponse.

Exercice 4 On considère dans l'espace euclidien $\mathbb{E}^3$ l'ellipsoïde $\mathcal{E}$ d'équation

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

où a, b, c sont trois constantes positives non nulles.

1. En chaque point (x, y, z) de $\mathcal{E}$, on considère le vecteur
$$(\frac{x}{a^2}, \frac{y}{b^2}, \frac{z}{c^2}).$$
Ce vecteur est-il normal à $\mathcal{E}$? On justifiera la réponse.
2. On pose
$$(\frac{x}{a^2}, \frac{y}{b^2}, \frac{z}{c^2}) = fN,$$
où N est unitaire, et f une fonction définie sur $\mathcal{E}$. Soit
$$\alpha : \mathbb{R} \to \mathcal{E}$$
une courbe C^2 sur $\mathcal{E}$ définie par
$$t \to \alpha(t).$$
Calculer
$$< \frac{d(fN)}{dt} \wedge \frac{d\alpha}{dt}, N > .$$
3. En déduire l'ensemble des points ombilics de $\mathcal{E}$.

On rappelle qu'un point sur une surface est un ombilic si l'endomorphisme de Weingarten en ce point est proportionnel à l'identité.