Université Claude Bernard Lyon 1
M1 Géométrie

Examen

11 Janvier 2007

Seules les notes de cours sont autorisées. Les calculettes et les téléphones portables sont interdits.

Exercice 1 Dans toute la suite, on note $\mathbb{R}^3$ l'espace euclidien de dimension 3 muni de son produit scalaire habituel $< .,. >$. Soit

$$\gamma : [0, L] \to \mathbb{R}^3$$

une courbe birégulière de classe C^2 de $\mathbb{R}^3$, paramétrée par l'abscisse curviligne s. On suppose que γ est fermée, c'est-à-dire que

$$\gamma(0) = \gamma(L); \gamma'(0) = \gamma'(L); \gamma''(0) = \gamma''(L).$$

On note $t(s)$ son vecteur tangent unitaire en s. On désigne par u un vecteur (fixe) de $\mathbb{R}^3$.

1. Calculer
$$\int_0^L < u, t(s) > ds.$$
2. La fonction
$$s \to < u, t(s) >$$
peut-elle être strictement positive (ou strictement négative) sur $[0, L]$?
3. Soit G l'application de Gauss à valeurs dans la sphère unité $\mathbb{S}^2$
$$G : [0, L] \to \mathbb{S}^2,$$
associée à la courbe γ. *On rappelle que G est définie par*
$$G(s) = t(s),$$
pour tout $s \in [0, L]$. Montrer que G possède la propriété suivante : si C est un grand cercle[1] de $\mathbb{S}^2$, alors l'image de G a une intersection non vide avec C.

[1] Par définition, un grand cercle de $\mathbb{S}^2$ est un cercle de $\mathbb{S}^2$ dont le centre est le centre $\mathbb{S}^2$.

4. En déduire que
$$\int_0^L k(s)ds \geq 2\pi,$$
où $k(s)$ désigne la courbure de la courbe γ au point s. *On pourra admettre le résultat suivant : si une courbe régulière fermée de $\mathbb{S}^2$ intersecte tous les grands cercles de $\mathbb{S}^2$, alors sa longueur est supérieure ou égale à 2π.*

Exercice 2 On note $\mathcal{SL}(2,\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices réelles $(2,2)$ de trace nulle. On identifiera dans la suite $\mathcal{SL}(2,\mathbb{R})$ à $\mathbb{R}^3$, par l'application
$$\phi : \mathcal{SL}(2,\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^3,$$
définie par
$$\phi(\begin{pmatrix} a & c \\ b & -a \end{pmatrix}) = (a,b,c).$$

1. Pour tout $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$, déterminer les valeurs propres (réelles ou complexes) de la matrice $\begin{pmatrix} a & c \\ b & -a \end{pmatrix} \in \mathcal{SL}(2,\mathbb{R})$, suivant le signe de a^2+bc.
2. On note $\mathcal{E}(\mathcal{SL}(2,\mathbb{R}))$ le sous-ensemble de $\mathcal{SL}(2,\mathbb{R})$ composé des matrices dont toutes les valeurs propres (réelles ou complexes) ont une partie imaginaire de valeur absolue strictement inférieure à π. Comparer $\phi(\mathcal{E}(\mathcal{SL}(2,\mathbb{R})))$ et
$$\{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \text{ tels que } a^2+bc+\pi^2 > 0\}.$$
3. Quelle est la nature de la quadrique de $\mathbb{R}^3$ d'équation
$$x^2+yz+\pi^2 = 0?$$
4. En déduire une caractérisation géométrique simple de $\phi(\mathcal{E}(\mathcal{SL}(2,\mathbb{R})))$.

Exercice 3 Soit $Gl(3,\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées $(3,3)$ inversible à coefficients réels, et $O(3,\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices orthogonales à coefficients réels[2].

1. Montrer que $Gl(3,\mathbb{R})$ est un ouvert de l'espace $M(3,\mathbb{R})$ des matrices carrées $(3,3)$ à coefficients réels, (*on identifiera $M(3,\mathbb{R})$ à $\mathbb{R}^9$, muni de son produit scalaire habituelle*).
2. Montrer que $O(3,\mathbb{R})$ est une sous-variété de $M(3,\mathbb{R})$ incluse dans $Gl(3,\mathbb{R})$. *On pourra considérer l'application qui à toute matrice carrée $(3,3)$ A associe la matrice ${}^tAA$.*
3. Soit ϵ un nombre réel strictement positif, et
$$\gamma :]-\epsilon,\epsilon[\to O(3,\mathbb{R})$$
une courbe régulière telle que $\gamma(0) = Id$. Montrer que $\gamma'(0)$ est une matrice antisymétrique.

[2] On rappelle qu'une matrice A est orthogonale si et seulement si ${}^tAA = Id$.

4. En déduire que la dimension de l'espace tangent à $O(3, \mathbb{R})$ au point Id est inférieure ou égale à 3 ; *(on peut en fait montrer - mais ce n'est pas demandé ici - que cette dimension est exactement égale à 3).*

Exercice 4 Etant donné un nombre réel t quelconque, on considère la droite $D(t)$ dont le paramétrage

$$\psi_t : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3,$$

est défini pour tout $z \in \mathbb{R}$ par

$$\psi_t(z) = (a(t)z + p(t), b(t)z + q(t), z),$$

où a, b, p, q sont des fonctions de classe C^2 définies sur $\mathbb{R}$.
Soit S la surface engendrée par la famille de droite $D(t)$ lorsque t varie.

1. En quels points la surface S est-elle régulière ?
2. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur a, b, p, q et leurs dérivées pour que la surface S soit à courbure de Gauss identiquement nulle en tout point où elle est régulière.

Exercice 5 On considère la surface S définie par le paramétrage suivant :

$$M : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,$$

définie par

$$M(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)),$$

avec $x(u, v) = u \cos v, y(u, v) = u \sin v, z(u, v) = \phi(u) + v$, où ϕ est une fonction de classe C^2.

1. En quels points cette surface est-elle régulière ?
2. Déterminer les courbures principales de cette surface en chaque point de l'axe Oz.
3. On considère la courbe définie sur S par l'équation $u = 1$. Calculer la courbure de Gauss de S le long de cette courbe. Que constate-t-on ?