Mastère Recherche 1- Géométrie

Examen Partiel

23 Novembre 2006

Toute phrase commence par une majuscule et se termine par un point. Seules les notes de cours sont autorisées. Les calculatrices et les téléphones portables sont interdits.

Exercice 1 **-** On considère l'hyperbole $\mathcal{H}$ du plan euclidien $\mathbb{R}^2$ définie par l'équation

$$xy = a,$$

où a est un nombre réel strictement positif. On note $k_M \geq 0$ la courbure de $\mathcal{H}$ en $M \in \mathcal{H}$.
A tout point M de $\mathcal{H}$ on associe le point P_M défini par

$$\overrightarrow{MP_M} = 2\overrightarrow{C_M M},$$

où C_M est le centre de courbure de $\mathcal{H}$ en M.

1. Déterminer le repère de Frenet de $\mathcal{H}$ en tout point $M = (x, y)$ de $\mathcal{H}$.
2. Déterminer la courbure k_M de $\mathcal{H}$ en tout point $M = (x, y)$ de $\mathcal{H}$.
3. Déterminer l'ensemble des points P lorsque M parcourt $\mathcal{H}$.

Exercice 2 **-** Soit Γ une courbe paramétrée birégulière C^∞ du plan euclidien, dont la courbure ne s'annule jamais. On note C_M le centre de courbure de Γ en en tout point M de Γ, J_M le milieu du segment MC_M, et c la courbe décrite par J lorsque M décrit Γ . Déterminer Γ pour que la tangente à c en tout point J fasse un angle constant avec la droite MC_M. Tracer sommairement la courbe obtenue.

Exercice 3 **-** On note $\mathbb{R}^3$ l'espace euclidien de dimension 3. Soit P un plan fixe de $\mathbb{R}^3$, et A un point fixe de $\mathbb{R}^3$.

1. Déterminer les courbes γ birégulières dont le plan normal en tout point M de γ contienne la projection orthogonale de A sur le plan passant par M et parallèle à P.
   Indication : avant de se lancer dans les calculs, il est bon de choisir un repère bien adapté au problème.
2. Déterminer les courbes répondant à la question précédente, et dont la binormale en tout point est orthogonale à P.