UFR de Mathématiques
MASTER 1 de MATHEMATIQUES

GEOMETRIE

Examen du 20 juin 2007

–Durée 3h.–

Exercice 1. Soit γ une courbe dans l'espace, paramétrée par l'abcisse curviligne s, et S la surface paramétrée par :

$$(s, v) \mapsto \gamma(s) + v\gamma'(s).$$

1. En quels points la surface est-elle régulière ?
2. Déterminer la première forme fondamentale, ainsi que son inverse.
3. Déterminer la seconde forme fondamentale.
4. Calculer les courbures principales.
5. Trouver les les directions de courbure, et les exprimer géométriquement.

Soit maintenant Σ la surface réglée de directrice γ et de génératrice en $\gamma(s)$ la normale principale à $\gamma(s)$.
6. Donner une paramétrisation simple de Σ.
7. En quels points la surface est-elle régulière ?
8. Déterminer la première forme fondamentale et son inverse.
9. Déterminer la seconde forme fondamentale.
10. Calculer les courbures principales.
11. Que vaut la courbure totale ? La courbure moyenne ?

Exercice 2.

Soit γ une courbe C^2 et régulière, tracée dans un plan P de $\mathbb{R}^3$, et également inscrite dans une surface S. On suppose que la normale à S en chaque point de γ fait un angle constant avec P.
1. Si l'angle nul, montrer qu'alors γ est une ligne de courbure pour S.
2. Dans le cas où l'angle n'est pas nul, que dire de l'intersection entre P et le plan tangent de S en un point de γ ?
3. En général, exprimer l'hypothèse de l'énoncé en utilisant un vecteur normal à P.
4. Après avoir dérivé l'expression obtenue au 3., montrer en utilisant le 2. que γ est toujours une ligne de courbure.
5. On suppose que S est une surface de révolution Paramétrer S en utilisant un système de coordonnées cylindriques, et déterminer simplement le vecteur normal à S en un

point de la surface. En utilisant le début de l'exercice, retrouver le résultat suivant : les méridiens et les latitudes sont des lignes de courbures.

Exercice 3.

Soit la courbe gauche paramétrée par

$$\left(\frac{3t^2}{4}, t, \frac{t^3}{4} + kt\right),$$

où k est une constante. Soit α l'angle de la binormale en un point de γ avec la droite (Ox).

1. Exprimer la torsion au point considéré en fonction de α.
2. Calculer la courbure de γ au temps $t = 0$, en fonction de α et k.
3. Déterminer une équation cartésienne du plan osculateur à γ en $t = 0$.