Université Claude Bernard Lyon 1

M1 Géométrie

Examen

11 Janvier 2008

Seules les notes de cours sont autorisées. Les calculettes et les téléphones portables sont interdits.

Exercice 1 Soit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels. On identifie $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ à $\mathbb{R}^{n^2}$. Soit $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ des matrices symétriques. Soit $O(n)$ l'ensemble des matrices orthogonales d'ordre n à coefficients réels, c'est-à-dire des matrices X d'ordre n qui vérifient :

$$({}^tX)X = \mathrm{Id}.$$

On considère l'application

$$f : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),$$

définie par

$$f(X) = ({}^tX)X.$$

1. Montrer que f est différentiable en tout point X_0 de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, et calculer sa différentielle df.
2. On suppose que X_0 appartient à $O(n)$. Soit S un élément de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe un élément M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que

$$df(X_0)(M) = S.$$

3. Montrer que $O(n)$ est une sous-variété de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
4. Quelle est la dimension de $O(n)$?
5. Déterminer l'espace tangent en X_0 à $O(n)$.
6. En particulier, caractériser l'espace tangent à $O(n)$ au point $X_0 = \mathrm{Id}$.

Exercice 2 Dans cet exercice, on appelle *surface topologique* tout espace topologique séparé non vide, dont tout point m possède un voisinage homéomorphe au disque ouvert de centre 0 et de rayon 1 dans le plan $\mathbb{R}^2$.

1. Montrer que toute variété différentiable de classe C^1 et de dimension 2 est une variété topologique.
2. Montrer que toute partie non vide ouverte d'une surface topologique est une surface topologique.
3. On appelle **action** d'un groupe G sur une surface topologique V tout homomorphisme de groupe

$$\rho : G \to \text{Aut } V,$$

où Aut V désigne le groupe des homéomorphismes de V. Si ρ est une action de G sur V, on définit la relation $\mathcal{R}$ sur V en posant, pour tout m et m' de V,

$$m\mathcal{R}m' \Leftrightarrow \exists g \in G \text{ tel que } m' = \rho(g)(m).$$

Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence. On note V/G l'espace quotient.

4. Soit V une surface topologique et G un groupe agissant de façon totalement discontinue et séparante sur V. Montrer que le quotient V/G est une surface topologique.
5. Sous les hypothèses de la question précédente, montrer que la projection naturelle

$$p : V \to V/G$$

est un homéomorphisme local, (c'est-à-dire que tout point m de V admet un voisinage U tel que

$$p_{|U} : U \to p(U)$$

soit un homéomorphisme).

Rappel - *Soit X est un espace topologique.*

- *Si X est muni d'une relation d'équivalence $\mathcal{R}$, alors l'espace quotient $X/\mathcal{R}$ est naturellement muni d'une topologie définie de la façon suivante. Soit*

$$p : X \to X/\mathcal{R}$$

la projection canonique. Les ouverts de $X/\mathcal{R}$ sont les parties U telles que $p^{-1}(U)$ soit un ouvert de X.
- *Soit ρ une action d'un groupe G sur un espace topologique X. On dit que cette action est totalement discontinue si tout point m de X possède un voisinage U tel que les ensembles $\rho(g)(U)$ soient tous disjoints lorsque g parcourt G.*
- *On dit que l'action de G sur X est séparante si, étant donnés deux points m et m' de X non équivalents, il existe un voisinage U de m et un voisinage U' de m' tels que :*

$$\forall g_1 \in G, g_2 \in G, \rho(g_1)(U) \cap \rho(g_2)(U') = \emptyset.$$

Exercice 3 1. Soit S la caténoide définie par l'application

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,$$

où

$$f(u, v) = (\cosh u \cos v, \cosh u \sin v, u).$$

(a) En quels points ce paramètrage est-il régulier ?

(b) Calculer en un point régulier la première forme fondamentale de cette surface.

(c) Calculer en un point régulier la deuxième forme fondamentale de cette surface.

(d) Montrer que cette surface est minimale.

2. Réciproquement, soit $\mathcal{S}$ la surface de révolution définie par l'application

$$g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$$

où

$$g(u, v) = (u \cos v, u \sin v, l(u)),$$

où

$$h : \mathbb{R} \to \mathbb{R},$$

est une fonction C^∞.

(a) Calculer la courbure moyenne de $\mathcal{S}$ en tout point régulier.

(b) Déterminer l de manière que $\mathcal{S}$ soit minimale.

(c) En déduire que $\mathcal{S}$ est une portion de caténoïde.

Exercice 4 Dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$, on appelle (i, j, k) la base canonique, (x, y, z) les coordonnées cartésiennes et (r, θ, z) les coordonnées cylindriques d'un point, avec

$$x = r \cos \theta \ , \ y = r \sin \theta.$$

On pose

$$u = (\cos \theta)i + (\sin \theta)j, v = -(\sin \theta)i + (\cos \theta)j.$$

Soit S une surface de révolution d'axe k de $\mathbb{R}^3$ dont un paramétrage en coordonnées cylindriques s'écrit :

$$(r, \theta) \to F(r, \theta) = ru + f(r)k,$$

où

$$f : \mathbb{R}^+ \to R$$

est une application C^∞.

1. En quels points la surface S est-elle régulière ?
2. Déterminer un vecteur normal en chaque point régulier de S.

3. Soit P la courbe plane d'équation

$$r = \frac{1}{1+\cos\theta}, z = 0,$$

avec $\theta \in \left]-\pi, \pi\right[$. Quelle est la nature de cette courbe ?

4. Soit C une courbe tracée sur S. On suppose que la projection orthogonale de C sur le plan xOy est la courbe P. Déterminer un paramètrage

$$\theta \to \alpha(\theta)$$

de C en fonction de θ, f, u, k.

5. Déterminer un vecteur tangent t en chaque point de C.

6. Déterminer f pour que C soit une asymptotique de S, c'est à dire pour que la seconde forme fondamentale h de S vérifie en tout point de C :

$$h(t,t) = 0,$$

où t est tangent à C.

On pourra montrer que f' vérifie une équation différentielle linéaire homogène du premier ordre, qu'on résoudra ensuite.