Université Claude Bernard Lyon 1
U.F.R. de Mathématiques
Mastère Recherche 1- Géométrie

Examen Partiel

Novembre 2007

Toute phrase commence par une majuscule et se termine par un point. Seules les notes de cours sont autorisées. Les calculatrices et les téléphones portables sont interdits.

Exercice 1 - Soit γ une courbe plane birégulière C^∞. Soient M_0 et M deux points de l'image Γ de γ. On suppose que la tangente en M à Γ coupe la tangente en M_0 à Γ en un point P, et on désigne par Q le point de la normale en M_0 à Γ qui se projette orthogonalement en P sur la tangente en M à Γ.

1. On fait tendre M vers M_0. Montrer que Q tend vers un point Q_0 qu'on exprimera en fonction de M_0 et du centre de courbure de Γ en M_0.
2. Dans le cas particulier d'une parabole dont le sommet est le point M_0, exprimer les coordonnées du point Q_0 en fonction du foyer de cette parabole.

   On rappelle que le foyer de la parabole $x^2 = 2py$ *est le point* $(0, \frac{p}{2})$.

Exercice 2 - Soit $(\mathbb{R}^3, <.,.>)$ l'espace euclidien de dimension 3 muni de son produit scalaire canonique. On note (i, j, k) une base orthonormée et on note (x, y, z) les coordonnées d'un point M de $\mathbb{R}^3$ dans cette base. On considère la courbe Γ d'équation :

$$y = \sin x;\ z = x(1 + y).$$

1. Montrer que Γ admet un paramétrage birégulier au voisinage de 0.
2. Calculer la courbure de cette courbe en 0.
3. Déterminer les coordonnées du centre de courbure de cette courbe en 0.

Exercice 3 - Soit $(\mathbb{R}^3, <.,.>)$ l'espace euclidien de dimension 3 muni de son produit scalaire canonique. Soit $\mathbb{S}^2$ la sphère unité de $\mathbb{R}^3$, et I un intervalle de

$\mathbb{R}$. Soit

$$B : I \to \mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3,$$

une application C^∞. On suppose qu'il existe une courbe C^∞ birégulière

$$\gamma : I \to \mathbb{R}^3,$$

dont la torsion est une constante strictement positive en tout point, et dont la binormale est B en tout point. Calculer la courbure, la torsion, le trièdre de Frénet de cette courbe en fonction de B et ses dérivées.

Exercice 4 **-** Soit $(\mathbb{R}^3, < .,. >)$ l'espace euclidien de dimension 3 muni de son produit scalaire canonique. Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et

$$\gamma : I \to \mathbb{R}^3,$$

une courbe C^∞ birégulière. Soit t_0 un point de I, et P_{t_0} le plan osculateur de la courbe au point γ_{t_0}. On note c la projection de γ sur plan P_{t_0}. On suppose que c est une courbe birégulière. Comparer la courbure de γ et la courbure de c au point t_0.