Université Claude Bernard Lyon 1

M1 Géométrie

Examen

19 Juin 2008

Seules les notes de cours sont autorisées. Les calculettes et les téléphones portables sont interdits.

Exercice 1

1. Déterminer la nature de la quadrique de $\mathbb{R}^3$ d'équation

$$x^2 + 3xy - 2y = 0.$$

2. On considère la courbe de $\mathbb{R}^3$ passant par le point $(1, -1, 1)$ et inscrite sur la surface d'équation

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 & = 3 \\ x^2 + 3xy - 2y & = 0. \end{cases}$$

   (a) Déterminer la tangente à cette courbe en tout point.

   (b) Déterminer le plan osculateur de cette courbe en tout point.

   (c) Déterminer le centre de courbure de cette courbe en tout point.

Exercice 2 Soit I un intervalle réel, et Δ_t une famille de droite dépendant d'un paramètre $\alpha \in I$ d'équation

$$x \cos t + y \sin t - p(t) = 0,$$

où

$$p : I \to \mathbb{R}$$

est une fonction C^∞. Soit

$$\begin{array}{rccc} \gamma & : I & \to & \mathbb{R}^2 \\ & t & \to & \gamma(t) \end{array}$$

une courbe plane birégulière, enveloppe de la famille de droite Δ_α, *(c'est-à-dire que pour tout $t \in I$, la tangente en t à γ est la droite Δ_t)*. Soient $i = (1, 0)$ et $j = (0, 1)$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$. On pose

$$u = (\cos t)i + (\sin t)j;$$
$$v = (-\sin t)i + (\cos t)j.$$

1. Pour tout $t \in I$, exprimer $\gamma(t)$ en fonction de p, p', u, v.
2. Pour tout $t \in I$, exprimer le centre de courbure $C(t)$ de γ en $\gamma(t)$ en fonction de p', p'', u, v.
3. Soit O l'origine du plan. Déterminer une famille (non triviale) de courbes planes γ telles qu'en tout point t, l'angle $\gamma(t)OC(t)$ soit droit.

Exercice 3 1. Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, muni d'une base (fixe) $(e_1, ..., e_n)$. On note $\chi(U)$ l'espace des champs de vecteurs sur U, *c'est-à-dire l'espace des applications C^∞ de U dans R^n*. On définit l'opérateur

$$\overline{\nabla} : \chi(U) \times \chi(U) \to \chi(U),$$

en posant, pour tous champs de vecteurs C^∞

$$X = \sum_{i=1}^{n} X^i e_i \text{ et } Y = \sum_{j=1}^{n} Y^j e_j$$

définis sur U,

$$\overline{\nabla}_X Y = \sum_{j=1}^{n} (\sum_{i=1}^{n} X^i \frac{\partial Y^j}{\partial x_i}) e_j.$$

Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction C^∞ sur U. Montrer que

(a) l'opérateur $\overline{\nabla}$ est indépendant de la base $(e_1, ..., e_n)$ servant à le définir.

(b)
$$\overline{\nabla}_X fY = X(f)Y + f\overline{\nabla}_X Y.$$

Le but des questions qui suivent est de généraliser l'opérateur $\overline{\nabla}$ aux variétés différentiables.

2. Soit M une variété différentiable. On note TM la variété des vecteurs tangents à M et $\pi : TM \to M$ la projection canonique. On note $\chi(M)$ l'espace des champs de vecteurs définis sur M, *c'est-à-dire l'espace des applications $X : M \to TM$ telles que*

$$\pi \circ X = Id_M.$$

Soit

$$\nabla : \chi(M) \times \chi(M) \to \chi(M),$$

une application vérifiant les propriétés suivantes :

$$\forall X, Y, Z, T \in \chi(M), \forall f \in C^\infty(M),$$

$$\begin{cases} \nabla_{X+Y} Z & = \nabla_X Z + \nabla_Y Z; \\ \nabla_X (Z + T) & = \nabla_X Z + \nabla_X T; \\ \nabla_{fX} Y & = f \nabla_X Y; \\ \nabla_X fY & = X(f)Y + f\nabla_X Y. \end{cases}$$

Soit $p \in M$, et V un ouvert de M contenant p.

(a) Soit q un point de M. Montrer que si Y_1 et Y_2 sont deux champs de vecteurs sur M tels que $Y_1(q) = Y_2(q)$ en tout point $q \in V$, alors

$$(\nabla_X Y_1)(q) = (\nabla_X Y_2)(q),$$

en tout point $q \in V$.

Pour résoudre cette question, on pourra admettre le résultat classique suivant : Si K est un compact de M et U un ouvert de M contenant K, il existe une fonction ψ C^∞ sur M égale à 1 sur K et dont le support est inclus dans U.

(b) Soit p un point de M. Montrer que si X_1 et X_2 sont deux champs de vecteurs sur M tels que $X_1(p) = X_2(p)$, alors pour tout champ de vecteurs Y sur M,

$$(\nabla_{X_1} Y)(p) = (\nabla_{X_2} Y)(p).$$

(c) Soit maintenant une carte (x, U) de M, telle que $p \in U$. Si $(\frac{\partial}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial}{\partial x_n})$ désigne une base de TU, on pose, pour tout $i, j, 1 \leq i, j \leq n$,

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j} = \sum_{k=1}^{n} \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x_k}.$$

Si

$$X = \sum_{i=1}^{n} X^i \frac{\partial}{\partial x_i}, Y = \sum_{j=1}^{n} Y^j \frac{\partial}{\partial x_j},$$

calculer $\nabla_X Y$ en fonction des X^i, Y^j et leurs dérivées, et des Γ_{ij}^k.

(d) On suppose dans cette question que $U = \mathbb{R}^n$ et que la base $(\frac{\partial}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial}{\partial x_n})$ est la base fixe de la première question. En reprenant les notations de la question 2c, déterminer les coefficients Γ_{ij}^k.

(e) On suppose maintenant que M est une sous-variété de dimension n de $\mathbb{R}^{n+m}$. Si X et Y sont des champs de vecteurs sur M, on note $\tilde{X}$ et $\tilde{Y}$ des champs de vecteurs définis sur $\mathbb{R}^{n+m}$ qui étendent X et Y[1].

(f) On pose alors, pour tout point $p \in M$

$$(\nabla_X Y)(p) = \mathrm{pr}_{|T_pM}(\overline{\nabla}_{\tilde{X}} \tilde{Y})(p).$$

i. Montrer que $\nabla_X Y$ ne dépend pas des extensions $\tilde{X}$ et $\tilde{Y}$.

ii. Montrer que l'opérateur ∇ ainsi défini vérifie les quatre propriétés de la question 2.

[1] c'est-à dire que la restriction de $\tilde{X}$ à M est égale à X et la restriction de $\tilde{Y}$ à M est égale à Y

iii. On considère l'opérateur h défini sur $\chi(M) \times \chi(M)$ en posant pour tout $X, Y \in \chi(M)$,

$$h(X,Y) = \overline{\nabla}_X Y - \nabla_X Y.$$

Montrer que h est bien défini et que c'est un opérateur symétrique.

(g) Expliciter ∇ et h lorsque

i. M est un n-plan affine de $\mathbb{R}^{n+m}$;

ii. M est une sphère de dimension n de $\mathbb{R}^{n+1}$.