Université Claude Bernard Lyon 1
U.F.R. de Mathématiques
Master 1 Recherche - Géométrie

Examen

Janvier 2009

Les notes de cours et T.D. sont interdites. Les calculatrices et les téléphones portables sont interdits.

Exercice 1 Soient a et b des nombres réels strictement positifs.

On considère l'application

$$s : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3,$$

définie par

$$s(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v)),$$

avec

$$x(u,v) = au \cosh v, y(u,v) = bu \sinh v, z(u,v) = uv.$$

1. Montrer que s définit une surface paramétrée régulière S.
2. Montrer que S est une quadrique.
3. Montrer que S est connexe.
4. Montrer que S admet la paramétrisation suivante :

$$x(u,v) = \frac{a}{2}(u+v), y(u,v) = \frac{b}{2}(v-u), z = uv.$$

   En déduire que S est une surface réglée, et préciser les génératrices.
5. Montrer que S est un conoïde, c'est à dire que les génératrices de S sont parallèles à une plan fixe.
6. Déterminer la première forme fondamentale de S en tout point.
7. Déterminer les courbures principales de S en tout point.

Exercice 2 Soit $\mathbb{R}^3$ l'espace vectoriel de dimension 3 sur $\mathbb{R}$. On note (x, y, z) les coordonnées d'un point dans la base canonique. On considère la forme différentielle α de degré 1 sur $\mathbb{R}^3$ définie par

$$\alpha = ydx - xdy + dz.$$

Soient u et v des fonctions définies sur $\mathbb{R}^3$.

1. On suppose que la forme $\alpha - vdu$ est fermée. Montrer que u et v sont des fonctions indépendantes de z.
2. Déterminer une fonction v non nulle telle qu'il n'existe aucune fonction u telle que $\alpha - vdu$ soit fermée.
3. Soient u, v des fonctions telles que $\alpha - vdu$ soit fermée. Soit m un point de $\mathbb{R}^3$. Montrer qu'au point m, les trois formes $du, dv, \alpha - vdu$ sont linéairement indépendantes.

Exercice 3 On munit $\mathbb{R}^3$ de son produit scalaire canonique. Soit S une surface régulière de $\mathbb{R}^3$. En tout point m de S, on définit une normale unitaire $\xi(m)$, et on suppose que l'application

$$m \to \xi_m$$

de M dans $\mathbb{R}^3$ est C^∞.

1. Montrer que l'application

   $$\phi : M \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$$

   définie par

   $$\phi(m, \lambda) = (m, \lambda\xi_m)$$

   est différentiable.
2. Montrer que l'image de ϕ est une sous-variété de $\mathbb{R}^6 \simeq \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$.
3. Quelle est la dimension de cette sous-variété ?