Université Claude Bernard Lyon 1

M1R – Géométrie : Courbes et surfaces

Corrigé de l'examen du XX janvier 2011

Les documents sont autorisés mais les calculettes sont interdites (car inutiles). Les deux problèmes sont indépendants. Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction pour l'attribution d'une note.

Le QCM. – On répond par vrai ou faux, sans justifier.

1.– Il existe une paramétrisation régulière f du plan pour laquelle les cœfficients de la première forme fondamentale vérifient $E = G = 0$ et F quelconque.

Rép.– Faux, si f est régulière alors $EG - F^2 > 0$.

2.– L'hélicoïde est une surface minimale (i.e. à courbure moyenne nulle).

Rép.– Vrai, découverte par Meunier, cf. CM-S4.

3.– Si une D est une droite contenue dans une surface alors tous les points de D sont à courbure de Gauss nulle.

Rép.– Faux, si $f(u,t) = \gamma(t)+u\delta(t)$ est une surface réglée alors $K(t,u) = -\dfrac{det^2(\gamma', \delta, \delta')}{(EG - F^2)^2}$.

4.– Si une courbe $\gamma : I \longrightarrow S$ tracée sur une surface est à la fois une géodésique et une courbe asymptotique, alors son support est une portion de droite.

Rép.– Vrai, si γ est une géodésique alors $(\gamma'')^T = 0$ et si c'est une courbe asymptotique alors $0 = k_{\gamma'} = (\gamma'')^N$, donc $\gamma'' = 0$, qui s'intègre en $\gamma(t) = at + b$ et le support est une droite.

5.– Si S est une surface minimale ($\forall p \in S,\ H(p) = 0$) non plate ($\forall p \in S,\ K(p) \neq 0$) alors il existe en tout point de S exactement deux directions asymptotiques perpendiculaires.

Rép.– Vrai, $H = \frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_2) = 0$ donc $\lambda_1 = -\lambda_2$. Comme $K = \lambda_1\lambda_2 \neq 0$, les deux courbures principales sont non nulles et donc distinctes, d'où la conclusion.

6.– La sphère est la seule surface S de $\mathbb{R}^3$ pour laquelle l'application de Gauss $N : S \longrightarrow \mathbb{S}^2$ soit une bijection.

Rép.– Faux, penser aux ellipsoïdes.

7.– Soit $N : S \longrightarrow \mathbb{S}^2$ l'application de Gauss d'une surface de $\mathbb{R}^3$. Si l'image de N est une courbe alors la surface est plate ($\forall p \in S,\ K(p) = 0$).

Rép.– Vrai. Le rang de dN est donc inférieur ou égal à 1. Par conséquent le noyau est non trivial, il fournit une direction principale de courbure principale nulle, donc $K \equiv 0$.

8.– Les génératrices des surfaces réglées sont des lignes de courbures.

Rép.– Faux, penser au PH= $\{z = xy\}$ et se placer au point $O = (0, 0, 0)$.

9.– Il existe une paramétrisation de la sphère épointée dont les cœfficients de la première forme fondamentale vérifient $E = G$ et $F = 0$.

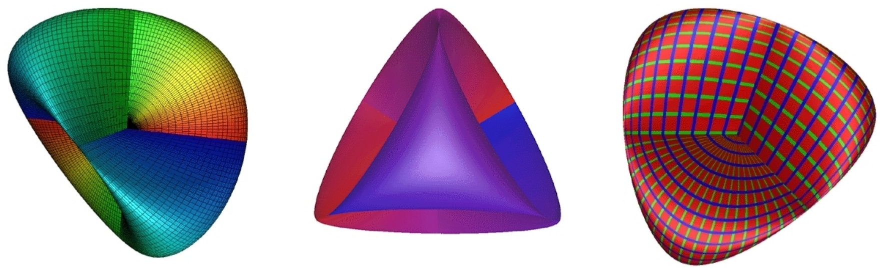
Rép.– Vrai, penser à la projection stéréographique et à son inverse.

10.– Le flux de $X = (x^2, y^2, z^2)$ à travers $\mathbb{S}^2(1)$ (normale sortante) vaut 4π.

Rép.– Faux, le produit scalaire de X et de la normale vaut $x^3 + y^3 + z^3$, une fonction impaire, donc son intégrale sur $\mathbb{S}^2$ vaut 0.

Problème 1. – On considère la surface paramétrée suivante, dite *surface romaine*[1] :

$$f: \begin{array}{ccc} [0,\pi]\times[0,2\pi] & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (u,v) & \longmapsto & (x,y,z) = (\sin 2u\cos v, \sin 2u \sin v, \sin^2 u \sin 2v) \end{array}$$



Plusieurs vues d'une surface romaine

1) Déterminer les cœfficients E G et F de la première forme fondamentale de f et montrer que

$$EG - F^2 = 4\cos^2 2u \sin^2 2u + \sin^4 2u \sin^2 2v + 4\cos^2 2u \cos^2 2v(1-\cos 2u)^2.$$

Rép.– On a

$f_u = (2\cos 2u \cos v, 2\cos 2u \sin v, \sin 2u \sin 2v)$ et $f_v = (-\sin 2u \sin v, \sin 2u \cos v, 2\sin^2 u \cos 2v)$.

D'où

$E = 4\cos^2 2u + \sin^2 2u \sin^2 2v$, $F = 2\sin 2u \sin 2v \sin^2 u \cos 2v$, $G = \sin^2 2u + 4\sin^4 u \cos^2 2v$.

et, puisque $2\sin^2 u = 1 - \cos 2u$, on a aussi

$$F = \sin 2u \sin 2v \cos 2v(1-\cos 2u), \quad G = \sin^2 2u + \cos^2 2v(1-\cos 2u)^2.$$

D'où

$$\begin{array}{rcl} EG - F^2 & = & (4\cos^2 2u + \sin^2 2u \sin^2 2v)(\sin^2 2u + \cos^2 2v(1-\cos 2u)^2) - \sin^2 2u \sin^2 2v \cos^2 2v(1-\cos 2u)^2 \\ & = & 4\cos^2 2u \sin^2 2u + \sin^4 2u \sin^2 2v \\ & & +4\cos^2 2u \cos^2 2v(1-\cos 2u)^2 + \sin^2 2u \sin^2 2v \cos^2 2v(1-\cos 2u)^2 \\ & & -\sin^2 2u \sin^2 2v \cos^2 2v(1-\cos 2u)^2 \\ & = & 4\cos^2 2u \sin^2 2u + \sin^4 2u \sin^2 2v + 4\cos^2 2u \cos^2 2v(1-\cos 2u)^2 \end{array}$$

2) Résoudre dans $[0,\pi]\times[0,2\pi]$ l'équation $EG - F^2 = 0$.

1. Car étudiée par Steiner lors d'un séjour à Rome en 1844.

Rép.– On a $EG-F^2=0$ ssi

$$\left\{\begin{array}{lcl}\cos^2 2u\sin^2 2u & = & 0\\ \sin^4 2u\sin^2 2v & = & 0\\ \cos^2 2u\cos^2 2v(1-\cos 2u)^2 & = & 0\end{array}\right.$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{lcl}\sin 2u & = & 0\\ \cos^2 2v(1-\cos 2u)^2 & = & 0\end{array}\right. \text{ ou } \left\{\begin{array}{lcl}\cos 2u & = & 0\\ \sin 2v & = & 0\end{array}\right.$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\Sigma_1\left\{\begin{array}{lcl}\sin 2u & = & 0\\ \cos 2u & = & 1\end{array}\right. \text{ ou } \Sigma_2\left\{\begin{array}{lcl}\sin 2u & = & 0\\ \cos 2u & = & -1\\ \cos^2 2v & = & 0\end{array}\right. \text{ ou } \Sigma_3\left\{\begin{array}{lcl}\cos 2u & = & 0\\ \sin 2v & = & 0\end{array}\right.$$

On a

- (u,v) solution de Σ_1 ssi $u=0$ ou $u=\pi$.
- (u,v) solution de Σ_2 ssi $(u,v)=(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{4})$ ou $(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{4})$ ou $(\frac{\pi}{2},\frac{5\pi}{4})$ ou $(\frac{\pi}{2},\frac{7\pi}{4})$
- (u,v) solution de Σ_3 ssi $(u,v)=(\frac{\pi}{4},0)$ ou $(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2})$ ou $(\frac{\pi}{4},\pi)$ ou $(\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{2})$ ou $(\frac{\pi}{4},2\pi)$
  ou $(u,v)=(\frac{3\pi}{4},0)$ ou $(\frac{3\pi}{4},\frac{\pi}{2})$ ou $(\frac{3\pi}{4},\pi)$ ou $(\frac{3\pi}{4},\frac{3\pi}{2})$
  ou $(\frac{3\pi}{2},2\pi)$.

3) Soit $S=f([0,\pi]\times[0,2\pi])$. On note $Irr\subset S$ l'ensemble des images par f des points $(u,v)\in[0,\pi]\times[0,2\pi]$ tels que $(EG-F^2)(u,v)=0$. Montrer que l'origine $O=(0,0,0)$ est dans Irr et que les autres points de Irr forment les sommets d'un octogone régulier.

Rép.– On a $f(0,v)=f(\pi,v)=(0,0,0)$. Donc toutes les solutions de Σ_1 sont envoyées sur l'origine de $\mathbb{R}^3$ et donc $O\in Irr$. On a

$$f(\frac{\pi}{2},v)=(0,0,\sin 2v)$$

donc les solutions de Σ_2 donnent les deux points distincts $(0,0,\pm1)$. Enfin

$$f(\frac{\pi}{4},v)=(\cos v,\sin v,\frac{1}{2}\sin 2v)\quad\text{et}\quad f(\frac{3\pi}{4},v)=(-\cos v,-\sin v,\frac{1}{2}\sin 2v)$$

et les solutions de Σ_3 produisent 4 points distincts : $(\pm1,0,0)$ et $(0,\pm1,0)$. Au bilan, excepté l'origine, les points de Irr se répartissent sur un octogone.

4) Soit

$$\begin{array}{llll} g: & [0,\pi]\times[0,2\pi] & \longrightarrow & \mathbb{R}^3\\ & (u,v) & \longmapsto & (X,Y,Z)=(\sin u\sin v,\sin u\cos v,\cos u)\end{array}$$

la paramétrisation usuelle de la sphère $\mathbb{S}^2$. Déterminer

$$\begin{array}{cccc} \Phi : & \mathbb{S}^2 & \longrightarrow & S \\ & (X,Y,Z) & \longmapsto & (x,y,z) = \Phi(X,Y,Z) \end{array}$$

telle que $f = \Phi \circ g$.

Rép.– On a

$$x = \sin 2u \cos v = 2 \sin u \cos u \cos v = 2ZY, \quad y = \sin 2u \sin v = 2 \sin u \cos u \sin v = 2ZX$$

et

$$z = \sin^2 u \sin 2v = 2 \sin v \cos v \sin^2 u = 2XY.$$

Il suffit faut donc prendre

$$\Phi(X,Y,Z) = (2YZ, 2ZX, 2XY).$$

5) Soit P un point quelconque de S. Montrer que $f^{-1}(P)$ contient au moins deux éléments.

Rép.– Notons que si $(X,Y,Z) \in \mathbb{S}^2$ alors $(-X,-Y,-Z) \in \mathbb{S}^2$ et que de plus

$$\Phi(X,Y,Z) = \Phi(-X,-Y,-Z).$$

Donc pour tout $P \in S$, $\Phi^{-1}(P)$ contient au moins deux éléments. Puisque f se factorise par Φ nécessairement $f^{-1}(P)$ contient au moins deux éléments.

6) Montrer que S est invariante par les trois retournements
$r_1 : (x,y,z) \longmapsto (x,-y,-z)$, $r_2 : (x,y,z) \longmapsto (-x,y,-z)$ et $r_3 : (x,y,z) \longmapsto (-x,-y,z)$
Suggestion.– Passer par Φ !

Rép.– Soit $(X,Y,Z) \in \mathbb{S}^2$. Notons qu'alors $(-X,Y,Z) \in \mathbb{S}^2$ et qu'on a

$$\Phi(-X,Y,Z) = (2YZ, -2XZ, -2YX) = r_1(\Phi(X,Y,Z)).$$

Puisque $\Phi(\mathbb{S}^2) = S$, il s'en suit que S est invariante par r_1. Raisonnements similaires pour r_2 et r_3.

7) Montrer que S est invariante par les trois réflexions
$s_1 : (x,y,z) \longmapsto (y,x,z)$, $s_2 : (x,y,z) \longmapsto (z,y,x)$ et $s_3 : (x,y,z) \longmapsto$

(x, z, y)

Rép.– Soit $(X, Y, Z) \in \mathbb{S}^2$. Notons qu'alors $(Y, X, Z) \in \mathbb{S}^2$ et qu'on a

$$\Phi(Y, X, Z) = (2XZ, 2YZ, 2YX) = s_1(\Phi(X, Y, Z)).$$

Puisque $\Phi(\mathbb{S}^2) = S$, il s'en suit que S est invariante par s_1. Raisonnements similaires pour s_2 et s_3.

Problème 2. – Soit $0 < b < a$ et $e = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$. On considère la courbe plane suivante, dite *roulette de Delaunay* :

$$\begin{array}{rccl} \gamma : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & t & \longmapsto & \left\{ \begin{array}{rcl} x(t) & = & \dfrac{b^2}{a} \displaystyle\int_0^t \frac{1}{(1 + e\cos u)\sqrt{1 - e^2\cos^2 u}} du \\ y(t) & = & b\sqrt{\dfrac{1 - e\cos t}{1 + e\cos t}} \end{array} \right. \end{array}$$

1) Déterminer les points réguliers de γ.

Rép.– On a

$$x'(t) = b\frac{\frac{b}{a}}{(1 + e\cos t)\sqrt{1 - e^2\cos^2 t}}$$

et

$$y'(t) = b\frac{e\sin(t)}{(1 + e\cos t)\sqrt{1 - e^2\cos^2 t}}$$

d'où

$$\|\gamma'(t)\|^2 = \left(\frac{b^2}{a^2} + e^2\sin^2 t\right)\frac{b^2}{(1 + e\cos t)^2(1 - e^2\cos^2 t)}.$$

Or $e^2 + \dfrac{b^2}{a^2} = 1$ donc

$$\begin{array}{rcl} \|\gamma'(t)\|^2 & = & \left(1 - e^2 + e^2\sin^2 t\right)\dfrac{b^2}{(1 + e\cos t)^2(1 - e^2\cos^2 t)} \\ & = & \left(1 - e^2\cos^2 t\right)\dfrac{b^2}{(1 + e\cos t)^2(1 - e^2\cos^2 t)} \\ & = & \dfrac{b^2}{(1 + e\cos t)^2}. \end{array}$$

Tous les points sont donc réguliers.

2) Montrer que la fonction abscisse curviligne a pour expression

$$S(t) = \int_0^t \frac{b}{1 + e\cos u} du$$

et déterminer la tangente unitaire $T(t)$ et la normale algébrique unitaire $N_{alg}(t)$ de γ en t.

Rép.– La formule donnée pour l'abscisse curviligne découle directement de la question précédente. D'autre part

$$T(t) := \frac{1}{\|\gamma'(t)\|} \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1 - e^2\cos^2 t}} \begin{pmatrix} \frac{b}{a} \\ e\sin t \end{pmatrix}$$

et

$$N_{alg}(t) := \frac{1}{\|\gamma'(t)\|} \begin{pmatrix} -y'(t) \\ x'(t) \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1 - e^2\cos^2 t}} \begin{pmatrix} -e\sin t \\ \frac{b}{a} \end{pmatrix}.$$

3) Montrer que

$$k_{alg}(t) = -\frac{1}{\|\gamma'(t)\|}\langle \frac{dN_{alg}(t)}{dt}, T(t)\rangle.$$

(On pourra reparamétrer γ par l'abscisse curviligne et utiliser les formules de Frenet).

Rép.– Notons $\widetilde{\gamma} = \gamma \circ S^{-1}$. La courbe $\widetilde{\gamma}$ est paramétrée par la l.a., on peut donc utiliser les formules de Frenet :

$$\frac{d(N_{alg} \circ S^{-1})}{ds}(s) = -\widetilde{k}_{alg}(s) T(S^{-1}(s))$$

où $\widetilde{k}_{alg}(s)$ est la courbure en s de $\widetilde{\gamma}$. On a donc

$$\widetilde{k}_{alg}(s) = -\langle \frac{d(N_{alg} \circ S^{-1})}{ds}(s), T(S^{-1}(s))\rangle$$

or, si $t = S^{-1}(s)$,

$$\frac{d(N_{alg} \circ S^{-1})}{ds}(s) = \frac{dN_{alg}(t)}{dt} \frac{dS^{-1}(s)}{ds} = \frac{1}{\|\gamma'(t)\|} \frac{dN_{alg}(t)}{dt}$$

ainsi

$$\widetilde{k}_{alg}(s) = -\frac{1}{\|\gamma'(t)\|}\langle \frac{dN_{alg}(t)}{dt}, T(t)\rangle.$$

Bien sûr, par définition, $k_{alg}(t) = \widetilde{k}_{alg}(s)$.

4) Montrer que la courbure algébrique de γ en t est

$$k_{alg}(t) = \frac{1}{a}\frac{e\cos t}{1 - e\cos t}.$$

Rép.– On a

$$\begin{aligned}
\frac{dN_{alg}(t)}{dt} &= \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\sqrt{1-e^2\cos^2 t}}\right)\begin{pmatrix} -e\sin t \\ \frac{b}{a} \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{1-e^2\cos^2 t}}\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} -e\sin t \\ \frac{b}{a} \end{pmatrix} \\
&= \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\sqrt{1-e^2\cos^2 t}}\right)\begin{pmatrix} -e\sin t \\ \frac{b}{a} \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{1-e^2\cos^2 t}}\begin{pmatrix} -e\cos t \\ 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
\langle\frac{dN_{alg}(t)}{dt}, T(t)\rangle &= \frac{1}{1-e^2\cos^2 t}\langle\begin{pmatrix} -e\cos t \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{b}{a} \\ e\cos t \end{pmatrix}\rangle \\
&= -\frac{b}{a}\frac{e\cos t}{1-e^2\cos^2 t}.
\end{aligned}$$

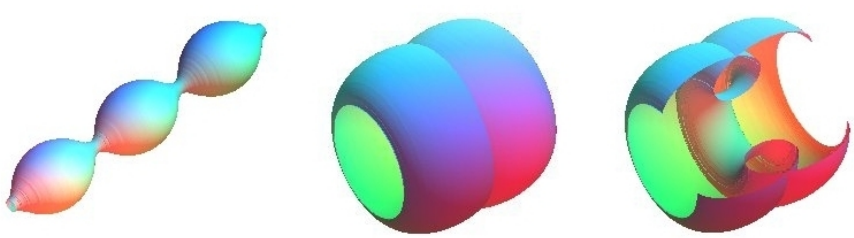
et

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\|\gamma'(t)\|}\langle\frac{dN_{alg}(t)}{dt}, T(t)\rangle &= -\left(\frac{1+e\cos t}{b}\right)\frac{b}{a}\frac{e\cos t}{1-e^2\cos^2 t} \\
&= -\frac{1}{a}\frac{e\cos t}{1-e\cos t}.
\end{aligned}$$

5) On considère la surface de révolution suivante, dite *surface de Delaunay* :

$$\begin{array}{llll} f: & \mathbb{R}\times[0,2\pi] & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (t,v) & \longmapsto & (y(t)\cos v, y(t)\sin v, x(t)) \end{array}$$

Calculer la première forme fondamentale de f.



Surfaces de Delaunay (deux valeurs différentes pour a)

Rép.– Un calcul direct montre que

$$E = x'^2 + y'^2 = \frac{b^2}{(1+e\cos t)^2}, \quad F = 0, \quad G = y^2 = b^2\frac{1-e\cos t}{1+e\cos t}.$$

6) Montrer que les cœfficients de la seconde forme fondamentale sont donnés par

$$\mathcal{L} = -\|\gamma'\|^2 k_{alg}(t), \quad \mathcal{M} = 0 \text{ et } \mathcal{N} = \frac{b}{a}\|\gamma'(t)\|$$

(au signe près dépendant du choix de la normale unitaire).

Rép.– Soit

$$n = \frac{1}{\|\gamma'\|}(-x'\cos v, -x'\sin v, y')$$

une normale unitaire. On a

$$\mathcal{L} = \langle n, f_{tt}\rangle = \frac{1}{\|\gamma'\|}\langle \begin{pmatrix} -x'\cos v \\ -x'\sin v \\ y' \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y''\cos v \\ y''\sin v \\ x'' \end{pmatrix} \rangle = \frac{-x'y'' + y'x''}{\|\gamma'\|} = -\|\gamma'\|^2 k_{alg}(t).$$

Ainsi

$$\mathcal{L} = -\frac{b^2}{(1+e\cos t)^2}\frac{1}{a}\frac{e\cos t}{1-e\cos t}.$$

On a immédiatement

$$\mathcal{M} = \langle n, f_{tv}\rangle = 0.$$

Enfin

$$\mathcal{N} = \langle n, f_{vv}\rangle = \frac{1}{\|\gamma'\|}\langle \begin{pmatrix} -x'\cos v \\ -x'\sin v \\ y' \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -y\cos v \\ -y\sin v \\ 0 \end{pmatrix} \rangle = \frac{x'y}{\|\gamma'\|}$$

d'où

$$\mathcal{N} = \frac{b^3}{a}\frac{1}{\|\gamma'\|}\frac{1}{(1+e\cos t)^2} = \frac{b^2}{a}\frac{1}{1+e\cos t} = \frac{b}{a}\|\gamma'(t)\|.$$

7) Déduire de 5) et 6) que la courbure moyenne de f est constante.

Rép.– La courbure moyenne est donnée par la formule

$$H = \frac{1}{2}\frac{\mathcal{L}G + \mathcal{N}E - 2\mathcal{M}F}{EG - F^2}$$

qui devient ici

$$H = \frac{1}{2}\left(\frac{\mathcal{L}}{E} + \frac{\mathcal{N}}{G}\right).$$

Notons que

$$\frac{\mathcal{L}}{E} = -k_{alg} = -\frac{1}{a}\frac{e\cos t}{1-e\cos t}$$

et

$$\frac{\mathcal{N}}{G} = \frac{b^2}{a}\frac{1}{1+e\cos t}\frac{1}{b^2}\frac{1+e\cos t}{1-e\cos t} = \frac{1}{a}\frac{1}{1-e\cos t}.$$

Finalement
$$H = \frac{1}{2}\left(\frac{\mathcal{L}}{E} + \frac{\mathcal{N}}{G}\right) = \frac{1}{2a}.$$
La courbure moyenne est constante.