Université Claude Bernard Lyon 1

# M1R – Géométrie : Courbes et surfaces

Janvier 2011 ? - Durée 3 heures

*Les documents sont autorisés mais les calculettes sont interdites (car inutiles). Les deux problèmes sont indépendants. Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction pour l'attribution d'une note.*

**Le QCM. –** On répond par vrai ou faux, sans justifier.

**1.–** Il existe une paramétrisation régulière $f$ du plan pour laquelle les cœfficients de la première forme fondamentale vérifient $E = G = 0$ et $F$ quelconque.

**2.–** L'hélicoïde est une surface minimale (i.e. à courbure moyenne nulle).

**3.–** Si une $D$ est une droite contenue dans une surface alors tous les points de $D$ sont à courbure de Gauss nulle.

**4.–** Si une courbe $\gamma : I \longrightarrow S$ tracée sur une surface est à la fois une géodésique et une courbe asymptotique, alors son support est une portion de droite.

**5.–** Si $S$ est une surface minimale ($\forall p \in S,\ H(p) = 0$) non plate ($\forall p \in S,\ K(p) \neq 0$) alors il existe en tout point de $S$ exactement deux directions asymptotiques perpendiculaires.

**6.–** La sphère est la seule surface $S$ de $\mathbb{R}^3$ pour laquelle l'application de Gauss $N : S \longrightarrow \mathbb{S}^2$ soit une bijection.

**7.–** Soit $N : S \longrightarrow \mathbb{S}^2$ l'application de Gauss d'une surface de $\mathbb{R}^3$. Si l'image de $N$ est une courbe alors la surface est plate ($\forall p \in S,\ K(p) = 0$).

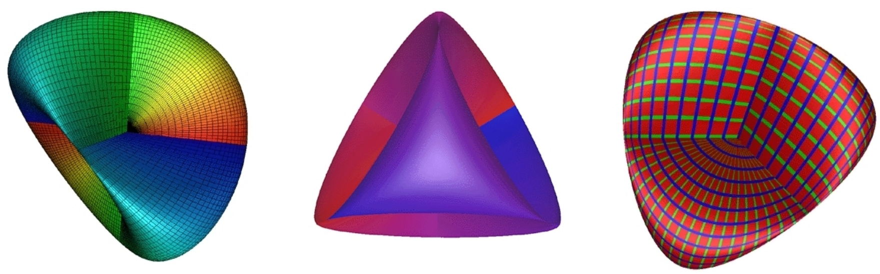
**8.–** Les génératrices des surfaces réglées sont des lignes de courbures.

**9.–** Il existe une paramétrisation de la sphère épointée dont les cœfficients de la première forme fondamentale vérifient $E = G$ et $F = 0$.

**10.–** Le flux de $X = (x^2, y^2, z^2)$ à travers $\mathbb{S}^2(1)$ (normale sortante) vaut $4\pi$.

**Problème 1.** – On considère la surface paramétrée suivante, dite *surface romaine*[1] :

$$\begin{array}{rccl} f : & [0,\pi] \times [0,2\pi] & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (u,v) & \longmapsto & (x,y,z) = (\sin 2u \cos v, \sin 2u \sin v, \sin^2 u \sin 2v) \end{array}$$



*Plusieurs vues d'une surface romaine*

1) Déterminer les cœfficients $E$ $G$ et $F$ de la première forme fondamentale de $f$ et montrer que

$$EG - F^2 = 4\cos^2 2u \sin^2 2u + \sin^4 2u \sin^2 2v + 4\cos^2 2u \cos^2 2v (1 - \cos 2u)^2.$$

2) Résoudre dans $[0,\pi] \times [0,2\pi]$ l'équation $EG - F^2 = 0$.

3) Soit $S = f([0,\pi] \times [0,2\pi])$. On note $Irr \subset S$ l'ensemble des images par $f$ des points $(u,v) \in [0,\pi] \times [0,2\pi]$ tels que $(EG - F^2)(u,v) = 0$. Montrer que l'origine $O = (0,0,0)$ est dans $Irr$ et que les autres points de $Irr$ forment les sommets d'un octogone régulier.

4) Soit

$$\begin{array}{rccl} g : & [0,\pi] \times [0,2\pi] & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (u,v) & \longmapsto & (X,Y,Z) = (\sin u \sin v, \sin u \cos v, \cos u) \end{array}$$

1. Car étudiée par Steiner lors d'un séjour à Rome en 1844.

la paramétrisation usuelle de la sphère $\mathbb{S}^2$. Déterminer

$$\begin{array}{cccc} \Phi : & \mathbb{S}^2 & \longrightarrow & S \\ & (X,Y,Z) & \longmapsto & (x,y,z) = \Phi(X,Y,Z) \end{array}$$

telle que $f = \Phi \circ g$.

5) Soit $P$ un point quelconque de $S$. Montrer que $f^{-1}(P)$ contient au moins deux éléments.

6) Montrer que $S$ est invariante par les trois retournements $r_1 : (x,y,z) \longmapsto (x,-y,-z)$, $r_2 : (x,y,z) \longmapsto (-x,y,-z)$ et $r_3 : (x,y,z) \longmapsto (-x,-y,z)$

SUGGESTION.– Passer par $\Phi$ !

7) Montrer que $S$ est invariante par les trois réflexions $s_1 : (x,y,z) \longmapsto (y,x,z)$, $s_2 : (x,y,z) \longmapsto (z,y,x)$ et $s_3 : (x,y,z) \longmapsto (x,z,y)$

**Problème 2. –** Soit $0 < b < a$ et $e = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$. On considère la courbe plane suivante, dite *roulette de Delaunay* :

$$\begin{array}{cccc} \gamma : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & t & \longmapsto & \left\{ \begin{array}{ccl} x(t) & = & \dfrac{b^2}{a}\displaystyle\int_0^t \frac{1}{(1+e\cos u)\sqrt{1-e^2\cos^2 u}}du \\ y(t) & = & b\sqrt{\dfrac{1-e\cos t}{1+e\cos t}} \end{array} \right. \end{array}$$

1) Déterminer les points réguliers de $\gamma$.

2) Montrer que la fonction abscisse curviligne a pour expression

$$S(t) = \int_0^t \frac{b}{1+e\cos u}du$$

et déterminer la tangente unitaire $T(t)$ et la normale algébrique unitaire $N_{alg}(t)$ de $\gamma$ en $t$.

3) Montrer que

$$k_{alg}(t) = -\frac{1}{\|\gamma'(t)\|}\langle \frac{dN_{alg}(t)}{dt}, T(t)\rangle.$$

(On pourra reparamétrer $\gamma$ par l'abscisse curviligne et utiliser les formules de Frenet).

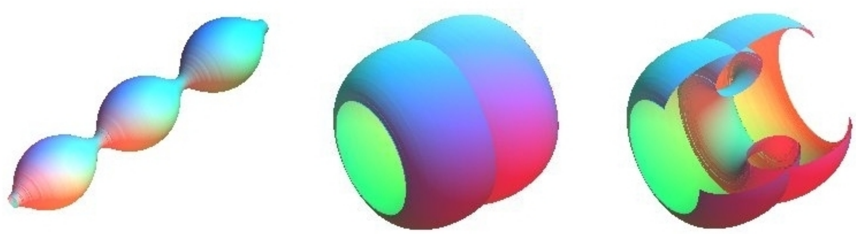
4) Montrer que la courbure algébrique de $\gamma$ en $t$ est

$$k_{alg}(t) = \frac{1}{a}\frac{e\cos t}{1 - e\cos t}.$$

5) On considère la surface de révolution suivante, dite *surface de Delaunay* :

$$\begin{array}{rlcl} f: & \mathbb{R} \times [0, 2\pi] & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (t, v) & \longmapsto & (y(t)\cos v, y(t)\sin v, x(t)) \end{array}$$

Calculer la première forme fondamentale de $f$.



*Surfaces de Delaunay (deux valeurs différentes pour a)*

6) Montrer que les cœfficients de la seconde forme fondamentale sont donnés par

$$\mathcal{L} = -\|\gamma'\|^2 k_{alg}(t), \quad \mathcal{M} = 0 \text{ et } \mathcal{N} = \frac{b}{a}\|\gamma'(t)\|$$

(au signe près dépendant du choix de la normale unitaire).

7) Déduire de 5) et 6) que la courbure moyenne de $f$ est constante.