Université Claude Bernard Lyon 1

M1R – Géométrie : Courbes et surfaces

Corrigé du contrôle partiel du XX octobre 2010

Les documents sont autorisés mais les calculettes sont interdites (car inutiles). Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction pour l'attribution d'une note.

Le QCM. – On répond par vrai ou faux, sans justifier.

1.– Il n'existe pas de courbe paramétrée de classe C^1 dont le support soit $\Gamma = \{(0, y) \,|y \in \mathbb{R}_+\} \cup \{(x, 0) \,|x \in \mathbb{R}_+\}$.

Rép.– Faux, choisir $\gamma(t) = (0, t^2)$ si $t \leq 0$ et $\gamma(t) = (t^2, 0)$ si $t > 0$.

2.– Si une courbe paramétrée n'a pas de point d'inflexion alors elle est birégulière.

Rép.– Faux, la courbure algébrique peut s'annuler sans changer de signe

3.– Soient $O = (0, 0)$ et $A = (2, 0)$ deux points du plan et $P = [O, A] \times [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$. Alors, il existe une courbe plane birégulière à courbure constante ≥ 1 joignant O et A et dont le support est contenu dans P.

Rép.– Faux, les supports des courbes planes birégulières à courbure constante sont des arcs de cercles. Puisque la courbure est ≥ 1, le support contient nécessairement un demi-cercle de rayon 1 centré en $(1, 0)$. Ce support n'est pas contenu dans P.

4.– Soient $O = (0, 0, 0)$ et $A = (2, 0, 0)$ deux points de l'espace et $P = [O, A] \times [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \times [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$. Alors, il existe une courbe de l'espace birégulière à courbure constante ≥ 1 joignant O et A et dont le support est contenu dans P.

Rép.– Vrai, une hélice de rayon $\frac{1}{2}$ ayant suffisamment de spirales convient. En effet dans ce cas, $\tau \approx 0$ et $k \approx 2$.

5.– Soit $\gamma : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $t \longmapsto (\cos^3 t, \sin^3 t)$. L'aire du domaine délimité par γ vaut $\dfrac{3\pi}{8}$.

Rép.– Vrai, appliquer la formule de Green-Riemann pour le vérifier.

6.– Soit $\gamma : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ une courbe plane birégulière fermée. Si le support de γ est un cercle alors l'indice de rotation de γ vaut ± 1.

Rép.– Faux, γ peut parcourir plusieurs fois son support...

7.– Soit α une 2-forme à support compact de $\mathbb{R}^2$. Si β est une 1-forme de $\mathbb{R}^2$ telle que $\alpha = d\beta$ alors β est à support compact.

Rép.– Faux. Supposons β à support compact et soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$. Alors $\beta_1 = \beta + df$ est une primitive de α et il est facile de choisir f telle que β_1 ne soit pas à support compact, par exemple $f(x, y) = x^2 + y^2$.

8.– Soit $\gamma : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ une courbe fermée simple C^2 et r une réflexion quelconque du plan, alors $Ind(r \circ \gamma) = -Ind(\gamma)$.

Rép.– Vrai, une réflexion change le sens des bases donc $k_{alg}(r \circ \gamma) = -k_{alg}(\gamma)$ et la formule $Ind(\gamma) = -\dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} k_{alg}(t) \|\gamma'(t)\| dt$ permet de conclure.

9.– Soit $\gamma : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ une courbe fermée simple C^2 paramétrée par la l.a. alors

$$\int_0^{2\pi} k(s) ds \geq 2\pi.$$

Rép.– Vrai, on a

$$2\pi = \left| \int_0^{2\pi} k_{alg}(s) ds \right| \leq \int_0^{2\pi} |k_{alg}(s)| ds = \int_0^{2\pi} k(s) ds.$$

10.– Le support de la courbe $\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $t \longmapsto (\cos(\cos t), \sin(\cos(t)), \cos(t))$ est inclu dans une sphère.

Rép.– Faux, le support de γ est celui d'une hélice circulaire.

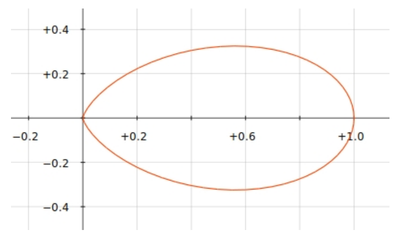
Exercice. – Soit $\rho : [0, \pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ la courbe polaire donnée par $\rho(\theta) = \cos^3 \theta$.

1) Déterminer les points réguliers de ρ et tracer sommairement son support.

Rép.– On a

$$\rho^2 + \rho'^2 = \cos^6\theta + 9\sin^2\theta\cos^4\theta = \cos^4\theta\left(\cos^2\theta + 9\sin^2\theta\right) = \cos^4\theta\left(1 + 8\sin^2\theta\right).$$

Donc tous les points sont réguliers sauf celui correspondant à $\theta = \frac{\pi}{2}$.



2) Déterminer la courbure de ρ.

Rép.– Un calcul direct montre que

$$k(\theta) = \frac{\cos^3\theta(1 + 8\sin^2\theta)^{\frac{3}{2}}}{8(1 + 2\sin^2\theta)}$$

3) Calculer l'aire enclose par ρ. Pour les besoins du calcul, on rappelle que

$$\cos^6\theta = \frac{5}{16} + \frac{15}{32}\cos 2\theta + \frac{3}{16}\cos 4\theta + \frac{1}{32}\cos 6\theta.$$

Rép.– L'application de la formule de Green-Riemann donne

$$Aire = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \rho^2 d\theta = \frac{5}{32}\pi.$$

Problème. – Soient $(D_t)_{t\in\mathbb{R}}$ la famille de droites d'équation

$$x\cos t + y\sin t = h(t)$$

où $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est C^∞ et 2π-périodique.

1) Déterminer la courbe enveloppe γ. A quelle condition sur h cette courbe est-elle régulière ?

Rép.– Avec les formules du cours, on trouve immédiatement

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x(t) & = & h(t)\cos t - h'(t)\sin t \\ y(t) & = & h(t)\sin t + h'(t)\cos t \end{array} \right.$$

puis

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x'(t) & = & (h(t)+h''(t))\sin t \\ y'(t) & = & (h(t)+h''(t))\cos t \end{array} \right.$$

Donc γ est régulière ssi, pour tout $t \in [0, 2\pi[$, $h(t) + h''(t) \neq 0$.

2) Décrire γ dans les cas où :
   a) h est constante non nulle,
   b) h est la fonction cos,
   c) h est la fonction $1 + \cos t$.

Rép.– Si h est constante, γ a pour support un cercle de rayon $|h|$. Si $h = \cos$ alors le support de γ est le point $(1, 0)$. Si $h(t) = 1 + \cos t$ alors le support de γ est un cercle de rayon 1 et de centre $(1, 0)$.

3) Montrer que $\gamma(t_1) = \gamma(t_2)$ est un point double ssi la rotation d'angle $t_1 - t_2$ envoie le vecteur $(h(t_1), h'(t_1))$ sur le vecteur $(h(t_2), h'(t_2))$.

Rép.– Il suffit de remarquer que

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h(t) \\ h'(t) \end{pmatrix} = R_t \begin{pmatrix} h(t) \\ h'(t) \end{pmatrix}$$

4) On suppose désormais que h est telle que γ est régulière et que $\gamma_{|[0,2\pi[}$ est sans point double. Montrer que $\gamma_{|[0,2\pi]}$ est fermée et que son support sépare $\mathbb{R}^2$ en deux composantes connexes, une bornée et l'autre non.

Rép.– Puisque h est 2π-périodique, l'expression de γ obtenue en 1 montre qu'elle est fermée. D'après les hypothèses de la question $\gamma_{|[0,2\pi]}$ est simple, on peut donc appliquer le théorème de Jordan.

5) On note $\overline{\gamma}$ pour $\gamma_{|[0,2\pi]}$. Montrer que la longueur de $\overline{\gamma}$ ne dépend que de la valeur moyenne $\overline{h}$ de h.

Rép.– On a $\|\overline{\gamma}'(t)\| = |h(t) + h''(t)|$. Remarquons que $t \longmapsto h(t) + h''(t)$ ne change pas de signe puisque $\overline{\gamma}$ est régulière. Soit $\epsilon = sign(h(t) + h''(t))$, on a donc

$$\forall t \in [0, 2\pi], \quad \|\overline{\gamma}'(t)\| = \epsilon(h(t) + h''(t)).$$

D'où

$$Long(\overline{\gamma}) = \int_0^{2\pi} \|\overline{\gamma}'(t)\| dt = \epsilon \int_0^{2\pi} (h(t) + h''(t)) dt = \epsilon \int_0^{2\pi} h(t) dt = \epsilon 2\pi \overline{h}$$

car

$$\int_0^{2\pi} h''(t) dt = [h'(t)]_0^{2\pi} = 0.$$

6) On suppose que $\overline{\gamma}$ borde positivement sa composante bornée. Montrer l'aire de cette composante ne dépend que de $\overline{h}$ et des variances $Var(h)$ et $Var(h')$ de h et h'.

Rép.– On calcule l'aire enclose au moyen de la formule de Green-Riemann. On a :

$$Aire(\overline{\gamma}) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} xy' - yx' = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (h + h'')h dt = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (h^2 - h'^2) dt.$$

Or

$$h^2 = (h - \overline{h} + \overline{h})^2 = (h - \overline{h})^2 + 2(h - \overline{h})\overline{h} + \overline{h}^2$$

d'où

$$\int_0^{2\pi} h^2 dt = \int_0^{2\pi} (h - \overline{h})^2 dt + \int_0^{2\pi} \overline{h}^2 dt = 2\pi Var(h) + 2\pi \overline{h}^2.$$

D'autre part, puisque la moyenne de h' est nulle, on a

$$Var(h') = 2\pi \int_0^{2\pi} h'^2 dt.$$

Au bilan,

$$Aire(\overline{\gamma}) = \pi \left(Var(h) - Var(h') + \overline{h}^2 \right).$$

7) En appliquant l'inégalité de Wirtinger, retrouver l'inégalité isopérimétrique pour les courbes $\overline{\gamma}$.

Rép.– L'inégalité de Wirtinger affirme que $Var(h') \geq Var(h)$, par conséquent

$$Aire(\overline{\gamma}) = \pi \left(Var(h) - Var(h') + \overline{h}^2 \right) \leq \pi \overline{h}^2.$$

Or

$$Long(\overline{\gamma})^2 = 4\pi^2 \overline{h}^2$$

d'où

$$Long(\overline{\gamma})^2 \geq 4\pi Aire(\overline{\gamma}).$$