Université Claude Bernard Lyon 1

M1R – Géométrie : Courbes et surfaces

XX Octobre 2010 - 2 heures

Les documents sont autorisés mais les calculettes sont interdites (car inutiles). Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction pour l'attribution d'une note.

Le QCM. – On répond par vrai ou faux, sans justifier.

1.– Il n'existe pas de courbe paramétrée de classe C^1 dont le support soit $\Gamma = \{(0,y)\ |y \in \mathbb{R}_+\} \cup \{(x,0)\ |x \in \mathbb{R}_+\}$.

2.– Si une courbe paramétrée n'a pas de point d'inflexion alors elle est birégulière.

3.– Soient $O = (0,0)$ et $A = (2,0)$ deux points du plan et $P = [O,A] \times [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$. Alors, il existe une courbe plane birégulière à courbure constante ≥ 1 joignant O et A et dont le support est contenu dans P.

4.– Soient $O = (0,0,0)$ et $A = (2,0,0)$ deux points de l'espace et $P = [O,A] \times [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \times [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$. Alors, il existe une courbe de l'espace birégulière à courbure constante ≥ 1 joignant O et A et dont le support est contenu dans P.

5.– Soit $\gamma : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $t \longmapsto (\cos^3 t, \sin^3 t)$. L'aire du domaine délimité par γ vaut $\dfrac{3\pi}{8}$.

6.– Soit $\gamma : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ une courbe plane birégulière fermée. Si le support de γ est un cercle alors l'indice de rotation de γ vaut ± 1.

7.– Soit α une 2-forme à support compact de $\mathbb{R}^2$. Si β est une 1-forme de $\mathbb{R}^2$ telle que $\alpha = d\beta$ alors β est à support compact.

8.– Soit $\gamma : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ une courbe fermée simple C^2 et r une réflexion quelconque du plan, alors $Ind(r \circ \gamma) = -Ind(\gamma)$.

9.– Soit $\gamma : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ une courbe fermée simple C^2 paramétrée par la l.a. alors

$$\int_0^{2\pi} k(s)ds \geq 2\pi.$$

10.– Le support de la courbe $\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3, t \longmapsto (\cos(\cos t), \sin(\cos(t)), \cos(t))$ est inclu dans une sphère.

Exercice. – Soit $\rho : [0, \pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ la courbe polaire donnée par $\rho(\theta) = \cos^3 \theta$.

1) Déterminer les points réguliers de ρ et tracer sommairement son support.

2) Déterminer la courbure de ρ.

3) Calculer l'aire enclose par ρ. Pour les besoins du calcul, on rappelle que

$$\cos^6 \theta = \frac{5}{16} + \frac{15}{32} \cos 2\theta + \frac{3}{16} \cos 4\theta + \frac{1}{32} \cos 6\theta.$$

Problème. – Soient $(D_t)_{t \in \mathbb{R}}$ la famille de droites d'équation

$$x \cos t + y \sin t = h(t)$$

où $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est C^∞ et 2π-périodique.

1) Déterminer la courbe enveloppe γ. A quelle condition sur h cette courbe est-elle régulière ?

2) Décrire γ dans les cas où :
   a) h est constante non nulle,
   b) h est la fonction cos,
   c) h est la fonction $1 + \cos t$.

3) Montrer que $\gamma(t_1) = \gamma(t_2)$ est un point double ssi la rotation d'angle $t_1 - t_2$ envoie le vecteur $(h(t_1), h'(t_1))$ sur le vecteur $(h(t_2), h'(t_2))$.

4) On suppose désormais que h est telle que γ est régulière et que $\gamma_{|[0,2\pi[}$ est sans point double. Montrer que $\gamma_{|[0,2\pi]}$ est fermée et que son support sépare

$\mathbb{R}^2$ en deux composantes connexes, une bornée et l'autre non.

5) On note $\overline{\gamma}$ pour $\gamma_{|[0,2\pi]}$. Montrer que la longueur de $\overline{\gamma}$ ne dépend que de la valeur moyenne $\overline{h}$ de h.

6) On suppose que $\overline{\gamma}$ borde positivement sa composante bornée. Montrer l'aire de cette composante ne dépend que de $\overline{h}$ et des variances $Var(h)$ et $Var(h')$ de h et h'.

7) En appliquant l'inégalité de Wirtinger, retrouver l'inégalité isopérimétrique pour les courbes $\overline{\gamma}$.