Université Claude Bernard Lyon 1

M1R – Géométrie : Courbes et surfaces

Corrigé de l'examen du 23 juin 2011

Les documents sont autorisés mais les calculettes sont interdites (car inutiles). Les deux problèmes sont indépendants. Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction pour l'attribution d'une note.

Problème 1. – Soient $R > r > 0$ et $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ la surface paramétrée donnée par :

$$(\theta, \varphi) \longmapsto \begin{cases} (R + r\cos\varphi)\cos\theta \\ (R + r\cos\varphi)\sin\theta \\ r\sin\varphi \end{cases}$$

1) Montrer que f est régulière et déterminer en tout point (θ, φ) une normale unitaire $N(\theta, \varphi)$.

Rép.– On a

$$\frac{\partial f}{\partial \varphi} = \begin{cases} -r\sin\varphi\cos\theta \\ -r\sin\varphi\sin\theta \\ r\cos\varphi \end{cases} \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial f}{\partial \theta} = \begin{cases} -(R + r\cos\varphi)\sin\theta \\ (R + r\cos\varphi)\cos\theta \\ 0 \end{cases}$$

d'où

$$\frac{\partial f}{\partial \varphi} \wedge \frac{\partial f}{\partial \theta} = r(R + r\cos\varphi) \begin{cases} -\cos\varphi\cos\theta \\ \cos\varphi\sin\theta \\ -\sin\varphi \end{cases}$$

et

$$\|\frac{\partial f}{\partial \varphi} \wedge \frac{\partial f}{\partial \theta}\| = r(R + r\cos\varphi) > 0.$$

Ainsi, f est régulière et une normale unitaire est donnée par $N(\theta, \varphi) = (-\cos\varphi\cos\theta, \cos\varphi\sin\theta, -\sin\varphi)$.

2) Montrer que le support S de f est invariant par toute rotation d'axe (Oz). Reconnaître S.

Rép.– On a

$$f(\theta, \varphi) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R + r\cos\varphi \\ 0 \\ r\sin\varphi \end{pmatrix}.$$

Par conséquent le support de f est engendré par la rotation par rapport à l'axe (Oz) d'un cercle de rayon r et de centre $(R,0,0)$ du plan (Oxz). L'image de f est donc un tore.

3) Montrer que le plan tangent à S en $f(\theta,\varphi)$ passe par l'origine si et seulement si $\cos\varphi = -\frac{r}{R}$.

Rép.– D'après la question précédente, on peut restreindre la recherche aux points $(0,\varphi)$. Il s'agit de résoudre

$$f(0,\varphi) + u\frac{\partial f}{\partial \varphi}(0,\varphi) + v\frac{\partial f}{\partial \theta}(0,\varphi) = O$$

où les inconnues u et v sont dans $\mathbb{R}$. Ceci conduit au système :

$$\left\{\begin{array}{ccc} R + r\cos\varphi - ur\sin\varphi & = & 0 \\ v(R + r\cos\varphi) & = & 0 \\ r\sin\varphi + ur\cos\varphi & = & 0 \end{array}\right.$$

Notons que si $\varphi \in \frac{\pi}{2}\mathbb{Z}$, ce système n'a pas de solution. Supposons donc maintenant $\varphi \notin \frac{\pi}{2}\mathbb{Z}$. Il est alors équivalent au système

$$\left\{\begin{array}{ccc} u & = & \frac{R+r\cos\varphi}{r\sin\varphi} \\ v & = & 0 \\ u & = & -\frac{r\sin\varphi}{r\cos\varphi} \end{array}\right.$$

Au bilan,

$$\begin{array}{rcl} O \in T_{f(0,\varphi)}S & \Longleftrightarrow & \frac{R+r\cos\varphi}{r\sin\varphi} = -\frac{r\sin\varphi}{r\cos\varphi} \\ & \Longleftrightarrow & \cos\varphi = -\frac{r}{R}. \end{array}$$

4) Montrer que si le plan tangent à S en $f(\theta,\varphi)$ contient l'origine alors il est également tangent à S au point $f(\theta+\pi,-\varphi)$ (un tel plan est dit *bitangent*).

Rép.– Un rapide calcul montre que

$$\frac{\partial f}{\partial \theta}(\theta+\pi,-\varphi) = -\frac{\partial f}{\partial \theta}(\theta,\varphi) \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial \varphi}(\theta+\pi,-\varphi) = \frac{\partial f}{\partial \varphi}(\theta,\varphi)$$

ainsi

$$\overrightarrow{T_{f(\theta+\pi,-\varphi)}S} = \overrightarrow{T_{f(\theta,\varphi)}S}.$$

D'après la question précédente, si $T_{f(\theta,\varphi)}S$ contient l'origine alors $-\frac{r}{R} = \cos\varphi$ et puisque $\cos(-\varphi) = \cos\varphi$, on en déduit que $T_{f(\theta+\pi,-\varphi)}S$ contient l'origine. Au bilan, on a donc

$$T_{f(\theta,\varphi)}S = T_{f(\theta+\pi,-\varphi)}S.$$

5) Soit $\epsilon = \pm 1$. Quel est le support la courbe paramétrée $\gamma_\epsilon : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ donnée par

$$\gamma_\epsilon(t) = \begin{cases} \sqrt{R^2 - r^2}\sin t \\ \epsilon(R\cos t + r) \\ r\sin t \end{cases} \qquad ?$$

Rép.– Soit $e := \frac{\sqrt{R^2-r^2}e_1 + re_3}{R}$. On a

$$\gamma_\epsilon(t) = \epsilon r e_2 + R(\epsilon \cos t\, e_2 + \sin t\, e).$$

Ainsi le support de γ_ϵ est un cercle de centre $\Omega_\epsilon = \epsilon r e_2$ de rayon R.

6) Soit $\varphi \in [0, \pi]$ tel que $\cos\varphi = -\frac{r}{R}$. Montrer que $f(0, \varphi) = \gamma_\epsilon(\varphi)$ puis que, pour tout $t \in [0, 2\pi]$, on a $\langle \gamma_\epsilon'(t), N(0, \varphi)\rangle = 0$. En déduire que le support de γ_ϵ est contenu dans le plan bitangent $T_{f(0,\varphi)}S$.

Rép.– Puisque $\cos\varphi = -\frac{r}{R}$ et $\varphi \in [0, \pi]$ on a donc $\sin\varphi = \frac{1}{R}\sqrt{R^2 - r^2}$. Ainsi

$$\begin{array}{rcl} \gamma_\epsilon(\varphi) & = & (\sqrt{R^2-r^2}\frac{1}{R}\sqrt{R^2-r^2}, 0, r\sin\varphi) \\ & = & (R - \frac{r^2}{R}, 0, r\sin\varphi) \\ & = & (R + r\cos\varphi, 0, r\sin\varphi) \\ & = & f(0, \varphi). \end{array}$$

D'autre part

$$\begin{array}{rcl} \langle \gamma_\epsilon'(t), N(0,\varphi)\rangle & = & -\sqrt{R^2-r^2}\cos t\cos\varphi - r\cos t\sin\varphi \\ & = & \sqrt{R^2-r^2}\frac{r}{R}\cos t - r\frac{1}{R}\sqrt{R^2-r^2}\cos t \\ & = & 0. \end{array}$$

On en déduit que la courbe paramétrée γ_ϵ est incluse dans le plan $f(0, \varphi) + N(0, \varphi)^\perp$ c'est-à-dire le plan tangent à S en $f(0, \varphi)$.

7) Montrer que le support de γ_ϵ est contenu dans S.

Rép.– Soit $t \in [0, 2\pi]$. Le point $\gamma_\epsilon(t)$ appartient à S s'il existe (θ, φ) tels que

$$\left\{\begin{array}{rcl} (R + r\cos\varphi)\cos\theta & = & \sqrt{R^2-r^2}\sin t \\ (R + r\cos\varphi)\sin\theta & = & \epsilon(R\cos t + r) \\ r\sin\varphi & = & r\sin t \end{array}\right.$$

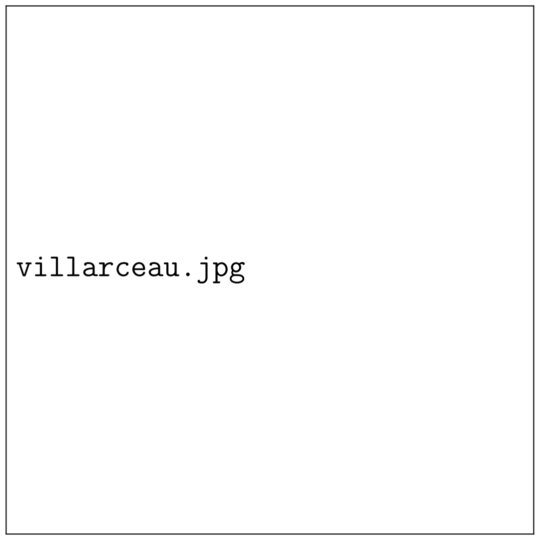
Ainsi, $f(\theta, t) = \gamma_\epsilon(t)$ si et seulement si

$$(\Sigma_t) \left\{\begin{array}{rcl} (R + r\cos t)\cos\theta & = & \sqrt{R^2-r^2}\sin t \\ (R + r\cos t)\sin\theta & = & \epsilon(R\cos t + r) \end{array}\right.$$

Notons que

$$(\sqrt{R^2 - r^2}\sin t)^2 + \epsilon^2(R\cos t + r)^2 \quad = \quad (R + r\cos t)^2$$

par conséquent, il existe $\theta := \theta(t)$ solution de (Σ_t) et donc $\gamma_\epsilon(t) \in S$.



Cercles de Villarceau

Nota.– Les cercles γ_+ et γ_- sont donc à l'intersection de S et du plan bitangent $T_{f(0,\varphi)}S$: ils sont appelés *cercles de Villarceau.*

Problème 2. – On considère la surface paramétrée suivante, dite *surface romaine*[1] :

$$\begin{array}{rccl} f: & [0,\pi]\times[0,2\pi] & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (u,v) & \longmapsto & (x,y,z) = (\sin 2u\cos v, \sin 2u\sin v, \sin^2 u\sin 2v) \end{array}$$

1. Car étudiée par Steiner lors d'un séjour à Rome en 1844.

steiner.jpg

Plusieurs vues d'une surface romaine

1) Déterminer les cœfficients E G et F de la première forme fondamentale de f et montrer que

$$EG - F^2 = 4\cos^2 2u \sin^2 2u + \sin^4 2u \sin^2 2v + 4\cos^2 2u \cos^2 2v(1 - \cos 2u)^2.$$

Rép.– On a

$$f_u = (2\cos 2u \cos v, 2\cos 2u \sin v, \sin 2u \sin 2v) \quad \text{et} \quad f_v = (-\sin 2u \sin v, \sin 2u \cos v, 2\sin^2 u \cos 2v).$$

D'où

$$E = 4\cos^2 2u + \sin^2 2u \sin^2 2v, \quad F = 2\sin 2u \sin 2v \sin^2 u \cos 2v, \quad G = \sin^2 2u + 4\sin^4 u \cos^2 2v.$$

et, puisque $2\sin^2 u = 1 - \cos 2u$, on a aussi

$$F = \sin 2u \sin 2v \cos 2v(1 - \cos 2u), \quad G = \sin^2 2u + \cos^2 2v(1 - \cos 2u)^2.$$

D'où

$$\begin{aligned}
EG-F^2 &= (4\cos^2 2u+\sin^2 2u\sin^2 2v)(\sin^2 2u+\cos^2 2v(1-\cos 2u)^2)-\sin^2 2u\sin^2 2v\cos^2 2v(1-\cos 2u)^2\\
&= 4\cos^2 2u\sin^2 2u+\sin^4 2u\sin^2 2v\\
&\quad +4\cos^2 2u\cos^2 2v(1-\cos 2u)^2+\sin^2 2u\sin^2 2v\cos^2 2v(1-\cos 2u)^2\\
&\quad -\sin^2 2u\sin^2 2v\cos^2 2v(1-\cos 2u)^2\\
&= 4\cos^2 2u\sin^2 2u+\sin^4 2u\sin^2 2v+4\cos^2 2u\cos^2 2v(1-\cos 2u)^2
\end{aligned}$$

2) Résoudre dans $[0,\pi]\times[0,2\pi]$ l'équation $EG-F^2=0$.

Rép.– On a $EG-F^2=0$ ssi

$$\left\{\begin{array}{lcl}
\cos^2 2u\sin^2 2u &=& 0\\
\sin^4 2u\sin^2 2v &=& 0\\
\cos^2 2u\cos^2 2v(1-\cos 2u)^2 &=& 0
\end{array}\right.$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{lcl}
\sin 2u &=& 0\\
\cos^2 2v(1-\cos 2u)^2 &=& 0
\end{array}\right. \quad \text{ou} \quad \left\{\begin{array}{lcl}
\cos 2u &=& 0\\
\sin 2v &=& 0
\end{array}\right.$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\Sigma_1\left\{\begin{array}{lcl}
\sin 2u &=& 0\\
\cos 2u &=& 1
\end{array}\right. \quad \text{ou} \quad \Sigma_2\left\{\begin{array}{lcl}
\sin 2u &=& 0\\
\cos 2u &=& -1\\
\cos^2 2v &=& 0
\end{array}\right. \quad \text{ou} \quad \Sigma_3\left\{\begin{array}{lcl}
\cos 2u &=& 0\\
\sin 2v &=& 0
\end{array}\right.$$

On a

- (u,v) solution de Σ_1 ssi $u=0$ ou $u=\pi$.
- (u,v) solution de Σ_2 ssi $(u,v)=(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{4})$ ou $(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{4})$ ou $(\frac{\pi}{2},\frac{5\pi}{4})$ ou $(\frac{\pi}{2},\frac{7\pi}{4})$
- (u,v) solution de Σ_3 ssi $(u,v)=(\frac{\pi}{4},0)$ ou $(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2})$ ou $(\frac{\pi}{4},\pi)$ ou $(\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{2})$ ou $(\frac{\pi}{4},2\pi)$
  ou $(u,v)=(\frac{3\pi}{4},0)$ ou $(\frac{3\pi}{4},\frac{\pi}{2})$ ou $(\frac{3\pi}{4},\pi)$ ou $(\frac{3\pi}{4},\frac{3\pi}{2})$
  ou $(\frac{3\pi}{2},2\pi)$.

3) Soit $S=f([0,\pi]\times[0,2\pi])$. On note $Irr\subset S$ l'ensemble des images par f des points $(u,v)\in[0,\pi]\times[0,2\pi]$ tels que $(EG-F^2)(u,v)=0$. Montrer que l'origine $O=(0,0,0)$ est dans Irr et que les autres points de Irr forment les sommets d'un octogone régulier.

Rép.– On a $f(0,v)=f(\pi,v)=(0,0,0)$. Donc toutes les solutions de Σ_1 sont envoyées sur l'origine de $\mathbb{R}^3$ et donc $O\in Irr$. On a

$$f(\frac{\pi}{2},v)=(0,0,\sin 2v)$$

donc les solutions de Σ_2 donnent les deux points distincts $(0,0,\pm 1)$. Enfin

$$f(\frac{\pi}{4},v) = (\cos v, \sin v, \frac{1}{2}\sin 2v) \quad \text{et} \quad f(\frac{3\pi}{4},v) = (-\cos v, -\sin v, \frac{1}{2}\sin 2v)$$

et les solutions de Σ_3 produisent 4 points distincts : $(\pm 1, 0, 0)$ et $(0, \pm 1, 0)$. Au bilan, excepté l'origine, les points de Irr se répartissent sur un octogone.

4) Soit

$$\begin{array}{rccl} g: & [0,\pi]\times[0,2\pi] & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (u,v) & \longmapsto & (X,Y,Z) = (\sin u \sin v, \sin u \cos v, \cos u) \end{array}$$

la paramétrisation usuelle de la sphère $\mathbb{S}^2$. Déterminer

$$\begin{array}{rccc} \Phi: & \mathbb{S}^2 & \longrightarrow & S \\ & (X,Y,Z) & \longmapsto & (x,y,z) = \Phi(X,Y,Z) \end{array}$$

telle que $f = \Phi \circ g$.

Rép.– On a

$$x = \sin 2u \cos v = 2\sin u \cos u \cos v = 2ZY, \quad y = \sin 2u \sin v = 2 \sin u \cos u \sin v = 2ZX$$

et

$$z = \sin^2 u \sin 2v = 2 \sin v \cos v \sin^2 u = 2XY.$$

Il suffit faut donc prendre

$$\Phi(X,Y,Z) = (2YZ, 2ZX, 2XY).$$

5) Soit P un point quelconque de S. Montrer que $f^{-1}(P)$ contient au moins deux éléments.

Rép.– Notons que si $(X,Y,Z) \in \mathbb{S}^2$ alors $(-X,-Y,-Z) \in \mathbb{S}^2$ et que de plus

$$\Phi(X,Y,Z) = \Phi(-X,-Y,-Z).$$

Donc pour tout $P \in S$, $\Phi^{-1}(P)$ contient au moins deux éléments. Puisque f se factorise par Φ nécessairement $f^{-1}(P)$ contient au moins deux éléments.

6) Montrer que S est invariante par les trois retournements $r_1 : (x,y,z) \longmapsto (x,-y,-z)$, $r_2 : (x,y,z) \longmapsto (-x,y,-z)$ et $r_3 : (x,y,z) \longmapsto$

$(-x,-y,z)$
Suggestion.– Passer par Φ !

Rép.– Soit $(X,Y,Z)\in\mathbb{S}^2$. Notons qu'alors $(-X,Y,Z)\in\mathbb{S}^2$ et qu'on a

$$\Phi(-X,Y,Z)=(2YZ,-2XZ,-2YX)=r_1(\Phi(X,Y,Z)).$$

Puisque $\Phi(\mathbb{S}^2)=S$, il s'en suit que S est invariante par r_1. Raisonnements similaires pour r_2 et r_3.

7) Montrer que S est invariante par les trois réflexions
$s_1 : (x,y,z)\longmapsto(y,x,z)$, $s_2 : (x,y,z)\longmapsto(z,y,x)$ et $s_3 : (x,y,z)\longmapsto(x,z,y)$

Rép.– Soit $(X,Y,Z)\in\mathbb{S}^2$. Notons qu'alors $(Y,X,Z)\in\mathbb{S}^2$ et qu'on a

$$\Phi(Y,X,Z)=(2XZ,2YZ,2YX)=s_1(\Phi(X,Y,Z)).$$

Puisque $\Phi(\mathbb{S}^2)=S$, il s'en suit que S est invariante par s_1. Raisonnements similaires pour s_2 et s_3.