Université Claude Bernard Lyon 1

M1R – Géométrie : Courbes et surfaces

23 juin 2011 - Durée 2 heures 30

Les documents sont autorisés mais les calculettes sont interdites (car inutiles). Les deux problèmes sont indépendants. Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction pour l'attribution d'une note.

Problème 1. – Soient $R > r > 0$ et $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ la surface paramétrée donnée par :

$$(\theta, \varphi) \longmapsto \begin{cases} (R + r\cos\varphi)\cos\theta \\ (R + r\cos\varphi)\sin\theta \\ \quad r\sin\varphi \end{cases}$$

1) Montrer que f est régulière et déterminer en tout point (θ, φ) une normale unitaire $N(\theta, \varphi)$.

2) Montrer que le support S de f est invariant par toute rotation d'axe (Oz). Reconnaître S.

3) Montrer que le plan tangent à S en $f(\theta, \varphi)$ passe par l'origine si et seulement si $\cos\varphi = -\frac{r}{R}$.

4) Montrer que si le plan tangent à S en $f(\theta, \varphi)$ contient l'origine alors il est également tangent à S au point $f(\theta + \pi, -\varphi)$ (un tel plan est dit *bitangent*).

5) Soit $\epsilon = \pm 1$. Quel est le support la courbe paramétrée $\gamma_\epsilon : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ donnée par

$$\gamma_\epsilon(t) = \begin{cases} \sqrt{R^2 - r^2}\sin t \\ \epsilon(R\cos t + r) \\ r\sin t \end{cases} \qquad ?$$

6) Soit $\varphi \in [0, \pi]$ tel que $\cos\varphi = -\frac{r}{R}$. Montrer que $f(0, \varphi) = \gamma_\epsilon(\varphi)$ puis que, pour tout $t \in [0, 2\pi]$, on a $\langle \gamma_\epsilon'(t), N(0, \varphi) \rangle = 0$. En déduire que le support de γ_ϵ est contenu dans le plan bitangent $T_{f(0,\varphi)}S$.

7) Montrer que le support de γ_ϵ est contenu dans S.

Cercles de Villarceau

Nota.– Les cercles γ_+ et γ_- sont donc à l'intersection de S et du plan bitangent $T_{f(0,\varphi)}S$: ils sont appelés *cercles de Villarceau*.

Problème 2. – On considère la surface paramétrée suivante, dite *surface romaine*[1] :

$$\begin{array}{rccl} f: & [0,\pi]\times[0,2\pi] & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (u,v) & \longmapsto & (x,y,z)=(\sin 2u\cos v, \sin 2u\sin v, \sin^2 u\sin 2v) \end{array}$$

1. Car étudiée par Steiner lors d'un séjour à Rome en 1844.

steiner.jpg

Plusieurs vues d'une surface romaine

1) Déterminer les cœfficients E G et F de la première forme fondamentale de f et montrer que

$$EG - F^2 = 4\cos^2 2u \sin^2 2u + \sin^4 2u \sin^2 2v + 4\cos^2 2u \cos^2 2v(1 - \cos 2u)^2.$$

2) Résoudre dans $[0, \pi] \times [0, 2\pi]$ l'équation $EG - F^2 = 0$.

3) Soit $S = f([0, \pi] \times [0, 2\pi])$. On note $Irr \subset S$ l'ensemble des images par f des points $(u, v) \in [0, \pi] \times [0, 2\pi]$ tels que $(EG - F^2)(u, v) = 0$. Montrer que l'origine $O = (0, 0, 0)$ est dans Irr et que les autres points de Irr forment les sommets d'un octogone régulier.

4) Soit

$$g: \begin{array}{ccl} [0,\pi]\times[0,2\pi] & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (u,v) & \longmapsto & (X,Y,Z) = (\sin u \sin v, \sin u \cos v, \cos u) \end{array}$$

la paramétrisation usuelle de la sphère $\mathbb{S}^2$. Déterminer

$$\Phi: \begin{array}{ccc} \mathbb{S}^2 & \longrightarrow & S \\ (X,Y,Z) & \longmapsto & (x,y,z) = \Phi(X,Y,Z) \end{array}$$

telle que $f = \Phi \circ g$.

5) Soit P un point quelconque de S. Montrer que $f^{-1}(P)$ contient au moins deux éléments.

6) Montrer que S est invariante par les trois retournements
$r_1 : (x,y,z) \longmapsto (x,-y,-z)$, $r_2 : (x,y,z) \longmapsto (-x,y,-z)$ et $r_3 : (x,y,z) \longmapsto (-x,-y,z)$
SUGGESTION.– Passer par Φ !

7) Montrer que S est invariante par les trois réflexions
$s_1 : (x,y,z) \longmapsto (y,x,z)$, $s_2 : (x,y,z) \longmapsto (z,y,x)$ et $s_3 : (x,y,z) \longmapsto (x,z,y)$