Exercice 1 1. Trouver un paramétrage C^∞ d'un angle droit 

en utilisant la fonction $f(t) = e^{-\frac{1}{t^2}}$.

2. Ce paramétrage est-il régulier au point O? Peut-on avoir un paramétrage régulier en O?

Exercice 2 On considère la *courbe cuspidale* $\gamma(t) = (t^2, t^3)$, $t \in \mathbb{R}$.

1. Dessiner la courbe autour de $t = 0$. Est-elle régulière en $(0,0)$?
2. Soit Γ la partie de cette courbe décrite par $t \in [0, \infty)$. Donner un paramétrage C^1 de Γ qui soit régulier en $(0,0)$. Montrer qu'il n'y a pas de paramétrage C^2 de Γ qui soit régulier en $(0,0)$.

Exercice 3 Pour $a > 0$, on considère la courbe $\gamma(t) = (t^p, t^q + at^{q+1})$, $t \in \mathbb{R}$, avec p et q entiers tels que $1 \leq p < q$.

1. Dessiner le voisinage du point $\gamma(0) = (0,0)$ pour p impair et q pair (point d'apparance ordinaire), p et q impair (point d'inflexion), p pair et q impair (point de rebroussement de 1ère espèce) et p et q pair (point de rebroussement de 2ème espèce).
2. Pour p impair, donner un paramétrage de la courbe qui soit régulier en $(0,0)$.

Exercice 4 Les *figures de Lissajous* sont les courbes $\gamma_{\omega,a}(t) = (\sin t, \sin(\omega t + a))$, $t \in \mathbb{R}$, où ω et a sont des constantes.

1. Pour $\omega = 1$, dessiner la courbe en fonction de a.
2. Pour $\omega = 2$, dessiner la courbe en fonction de a. Pour quelles valeurs de a la courbe est-elle régulière?
3. Montrer que la courbe est férmée (c'est à dire que $\gamma(t)$ est périodique en t) si et seulement si ω est rationnel.
4. Montrer que si ω est irrationnel, la courbe est partout dense dans le carré $\mid x \mid \leq 1$, $\mid y \mid \leq 1$.

Exercice 5 Soit $\{D_t, t \in I\}$ une famille de droites du plan. L'**enveloppe** de la famille $\{D_t\}$ est une courbe $\gamma(t)$, $t \in I$ dont les droites D_t sont les tangentes.

1. Supposons que les droites D_t soient décrites par l'équation $a(t)x + b(t)y + c(t) = 0$, où a, b et c sont des fonctions de classe C^1. Montrer que l'enveloppe $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ vérifie le système
$$a(t)x(t) + b(t)y(t) + c(t) = 0$$
$$a'(t)x(t) + b'(t)y(t) + c'(t) = 0.$$
En déduire une représentation paramétrique de $\gamma(t)$.
2. Exemple: on considère un segment de longueur L dont les extrémités glissent le long des côtés d'un angle droit (une porte de garage). La "courbe de garage" ou *astroïde* est la frontière de la zone balayée par le segment. Déterminer l'astroïde comme courbe parametrée et comme graphe d'une fonction.

Exercice 6 Quelles sont les courbes planes régulières à courbure constante?

Exercice 7 La *spirale logarithmique* est la courbe $\gamma(t) = (e^{at}\cos t, e^{at}\sin t) = e^{(a+i)t}$, $t \in \mathbb{R}$, où $a \neq 0$.

1. Dessiner la spirale logarithmique.
2. Calculer l'abscisse curviligne et la courbure de la spirale logarithmique. Exprimer la courbure en fonction de l'abscisse curviligne.
3. Montrer que, pour $a > 0$, on a $\gamma(t) \to (0,0)$ quand $t \to -\infty$. Montrer que la longueur d'arc entre 0 et t a une limite finie quand $t \to -\infty$.
4. Quelles sont les courbes planes régulières dont le rayon de courbure est proportionnel à l'arc?
5. Montrer que la tangente à la spirale logarithmique fait un angle constant avec la droite joignant le point courant à l'origine. Quelles sont les courbes planes ayant cette propriété?

Exercice 8 Une courbe plane $\gamma(t) = \rho(t)e^{i\varphi(t)}$ est définie en **coordonnées polaires** par la relation $\rho = \rho(\varphi)$.

1. Sous quelles conditions une courbe en coordonnées polaires est-elle régulière?
2. Montrer qu'une courbe plane régulière γ admet des coordonnées polaires si et seulement si le vecteur velocité γ' n'est jamais proportionnel au vecteur position γ.
3. Calculer la longueur d'arc et la courbure en coordonnées polaires.
4. Ecrire une paramétrisation de la spirale logarithmique en coordonnées polaires.

5. Ecrire une paramétrisation de la droite $ax + by + c = 0$ en coordonnées polaires.
6. Ecrire une paramétrisation de la courbe cuspidale $\gamma(t) = (t^2, t^3)$ en coordonnées polaires, pour $t > 0$.
7. Dessiner la courbe $\rho = \cos(n\varphi) + 2$ pour $n = 1, 2, 3$.
8. Etudier les courbes définies par $\rho = \frac{p}{1-e\cos\phi}$, où p et e sont des constantes positives. [Discuter les cas $e < 1$, $e = 1$ et $e > 1$.] Calculer leur courbure.

Exercice 9 Une roue roule sans glisser sur une droite dans le plan vertical. La courbe tracée par un point du bord de la roue s'appelle *cycloïde*.

1. Dessiner la cycloïde. Donner un paramétrage de la cycloïde et déterminer ses points singuliers.
2. Calculer l'abscisse curviligne et la courbure de la cycloïde. Exprimer la courbure en fonction de l'abscisse curviligne. Calculer la longueur d'arc de la cycloïde qui correspond à un tour complet de la roue.
3. Quelle est la forme des courbes décrites par des points intérieurs (respectivement, extérieurs) de la roue?
4. Etudier les points singuliers.

Exercice 10 Soit γ une courbe plane birégulière. La **développée** de γ est le lieu des centres de courbure de γ.

1. Ecrire la représentation paramétrique $\alpha(t) = ...$ de la développée.
2. Montrer que la développée est régulière si la dérivée de la courbure de γ ne s'annule pas.
3. Montrer que la tangente à α en $\alpha(t)$ est la normale à γ en $\gamma(t)$. [La développée est l'enveloppe des droites normales de γ.]
4. Montrer que si γ est de classe C^3 et $\rho' \neq 0$ entre t et t', la longueur d'arc de la développée entre t et t' est égale à $|\rho(t) - \rho(t')|$.
5. Montrer que quand t' tend vers t, le point d'intersection de la normale à γ en $\gamma(t)$ avec la normale à γ en $\gamma(t')$ tend vers $\alpha(t)$.
6. Déterminer la développée de la spirale logarithmique.
7. Dessiner la développée de l'ellipse. Que se passe-t-il aux sommets de l'ellipse?
8. Montrer que la developpée d'un cycloïde est un cycloïde.

Exercice 11 Soit γ une courbe plane régulière paramétrée par son abscisse curviligne. La **développante** de γ s'obtient de façon suivante. On prend un fil de longueur ℓ, on fixe une extrémité du fil au point $\gamma(0)$ et on laisse le fil suivre la courbe γ jusqu'en un point $\gamma(s)$, $0 \leq s < \ell$, en tenant l'autre extrémité $\beta(s)$ sous tension: la portion de fil d'extrémités $\gamma(s)$ et $\beta(s)$ est un segment de droite tangent à γ en $\gamma(s)$. La développante est la courbe décrite par le point $\beta(s)$.

1. Ecrire la représentation paramétrique de la développante.
2. Montrer que la développante est régulière si la courbure de γ ne s'annule pas.
3. Montrer que la normale à β en $\beta(s)$ est la tangente à γ en $\gamma(s)$.
4. Déterminer la courbure et le centre de courbure de la développante en s. En sachant que la développée d'une courbe est le lieu des centres de courbure, quelle est la développée de β?
5. Dessiner la développante du cercle.
6. Quelle est la forme de la développante si le fil passe par un point d'inflexion sur γ? Dessiner la développante de la courbe $\gamma(t) = (t, t^3)$.

Exercice 12 Soit γ une courbe régulière. On suppose que γ est située à l'intérieur (respectivement, à l'extérieur) d'un cercle C et qu'elle touche le cercle au point p: $\gamma(t_0) = p \in C$.

Montrer que le cercle osculateur de γ en p est situé à l'intérieur (respectivement, à l'extérieur) de C. [L'intérieur et l'extérieur sont traités dans le sens large.] Quelle conclusion pour le rayon de courbure en p?

Exercice 13 Soit γ une courbe régulière, soit ρ le rayon de courbure en $\gamma(t_0) = p$ (on suppose que $\rho < \infty$). Soit C_r un cercle de rayon r qui est tangent à γ en p et situé dans le demi-plan de concavité de γ en p (le demi-plan indiqué par la normale principale de γ en p).

Montrer que pour t proche de t_0, $\gamma(t)$ est situé à l'intérieur de C_r si $r > \rho$, et à l'extérieur de C_r si $r < \rho$.

Exercice 14 On considère la famille de courbes planes Γ_c définies par l'équation $y^2 - x^3 + 3x = c$, où $c \in \mathbb{R}$.

1. Dessiner les courbes Γ_c pour différentes valeurs de c. Expliciter l'évolution de Γ_c quand c varie entre $-\infty$ et ∞.
2. Déterminer les valeurs de c pour lesquelles Γ_c contient des points singuliers. Etudier ces points singuliers.
3. Calculer la courbure de Γ_0 en $(0, 0)$.

Exercice 15 Le *trèfle à quatre feuilles* est défini par l'équation $(x^2 + y^2)^3 - (x^2 - y^2)^2 = 0$. Dessiner le trèfle. Calculer la valeur maximale de sa courbure.